

# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04

Probabilidade condicionada; acontecimentos independentes

12.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_

1. Demonstre que se  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes, também são independentes  $\bar{A}$  e  $\bar{B}$ .

**Sugestão:** Se  $A$  e  $B$  são independentes, então  $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$ . Pretende-se demonstrar que  $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B})$ .

2. Estude a dependência dos acontecimentos  $M$  e  $N$ , sabendo que:

- $p(M) \neq 0$ ;  $p(N) \neq 0$  e  $M$  e  $N$  são incompatíveis;
- $p(M) \neq 0$  e  $M \subset N$ ;
- $p(N) = 0$  e  $M$  é um acontecimento qualquer.

3. Um casal tem três filhos e sejam os acontecimentos:

- A:** "o casal tem no máximo uma rapariga"
- B:** "o casal tem filhos de ambos os sexos"

Calcule  $p(A)$ ,  $p(B)$  e  $p(A \cap B)$ , e verifique se  $A$  e  $B$  são acontecimentos independentes.

4. A Luísa tem duas moedas no bolso, uma viciada e outra normal. Na moeda viciada a probabilidade de sair cara é  $\frac{3}{4}$ .

A Luísa tira uma moeda do bolso aleatoriamente, atira-a ao ar e verifica que sai cara. Determine a probabilidade de ela ter tirado do bolso a moeda viciada.

5. Tenho duas caixas iguais. A caixa **A** tem 10 rebuçados de mentol e 20 de limão, enquanto a **B** tem 20 de mentol e 10 de limão. Peguei numa das caixas e tirei ao acaso um rebuçado. Era de mentol. Qual é a probabilidade de ter escolhido a caixa **A**?

6. Os centros de transfusão sanguínea publicaram o quadro ao lado com a distribuição dos principais grupos sanguíneos no ano de 1997 num dado país. Sabe-se que o sangue de qualquer ser humano possui uma determinada característica chamada factor Rhésius (RH). Esta característica pode tomar duas formas: RH positivo ( $RH^+$ ) ou RH negativo ( $RH^-$ ). (Estas características não variam com o sexo)

Considerando um casal ao acaso, determine a probabilidade de que:

- O homem seja  $R^+$  e a mulher  $R^-$ .
- O homem seja  $[OR^+]$  e a mulher  $[AR^+]$ .
- O homem seja  $R^-$  e a mulher  $R^-$ .
- O homem seja  $[BR^-]$  e a mulher  $[BR^+]$ .
- Sabendo que um indivíduo tem sangue tipo A, ter  $R^-$ .

	O	A	B	AB
$R^+$	37,0%	38,1%	6,2%	2,8%
$R^-$	7,0%	7,2%	1,2%	0,5%

7. Um estudante realiza dois exames no mesmo dia. A probabilidade de que fique aprovado no primeiro exame é de 0,7 e a probabilidade de que passe no segundo é 0,6 e a de que aprove em ambos é de 0,4.

a) Calcule:

a1) a probabilidade de que fique aprovado em, pelo menos, um exame;

b2) a probabilidade de que não fique aprovado em nenhum.

b) Serão as provas independentes?

c) Determine a probabilidade de que passe no segundo exame, no caso de ter reprovado no primeiro.

8. Um saco contém seis bolas, numeradas de 1 a 6.

As bolas que têm números pares estão pintadas de verde.

As bolas que têm números ímpares estão pintadas de azul.

Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:

- A: "As duas bolas são da mesma cor."
- B: "O produto dos números das bolas é ímpar."

a) Determine  $p(A)$ . Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada  $p(A | B)$ .

9. Considere:

- uma caixa com seis bolas, todas brancas;
- seis bolas pretas, fora da caixa;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se duas vezes o dado.

Tiram-se, da caixa, tantas bolas brancas quantas o número saído no primeiro lançamento. Colocam-se, na caixa, tantas bolas pretas quantas o número saído no segundo lançamento.

a) Qual é a probabilidade de a caixa ficar com seis bolas? Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

b) Sejam A e B os acontecimentos:

A -«Sai face 5 no primeiro lançamento do dado.»

B -«Ficam, na caixa, menos bolas brancas do que pretas.»

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada  $p(B | A)$ .

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível,

10. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: Espadas, Copas, Ouros e Paus. Cada naipe tem **três figuras**: Rei, Dama e Valete.

a) Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Rei? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

b) De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Sejam  $E_1$ ,  $C_2$  e  $F_2$  os acontecimentos:

$E_1$ : sair Espadas na primeira extracção;

$C_2$ : sair Copas na segunda extracção;

$F_2$ : sair uma figura na segunda extracção.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de  $p((F_2 \cap C_2) | E_1)$ . Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicito o raciocínio que efectuou. O valor pedido deverá resultar apenas da interpretação do significado de  $p((F_2 \cap C_2) | E_1)$ , no contexto da situação descrita.

11. Uma turma do 12.º ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.

A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.

a) Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?

b) Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão.

b1) Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

**Nota:** Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

b2) Suponha que a escolha dos três elementos vai ser feita por sorteio, da seguinte forma.

Cada aluno escreve o seu nome numa folha de papel. As vinte e cinco folhas são dobradas e introduzidas num saco. Em seguida, retiram-se do saco, sucessivamente, três folhas de papel. O primeiro nome a sair corresponde ao do presidente, o segundo, ao do tesoureiro, e o terceiro, ao do responsável pelas relações públicas.

Sejam A, E e C os acontecimentos:

A: «o presidente é uma rapariga»;

E: «o tesoureiro é uma rapariga»;

C: «a comissão é formada só por raparigas».

Indique o valor da probabilidade condicionada  $p(C | (A \cap B))$  e, numa pequena composição, com cerca de dez linhas, justifique a sua resposta.

**Nota:** Não aplique a fórmula da probabilidade condicionada. O valor pedido deverá resultar exclusivamente da interpretação de  $p(C | (A \cap B))$ , no contexto do problema.

12. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam  $E_1$  e  $E_2$  dois acontecimentos possíveis ( $E_1 \subset S$  e  $E_2 \subset S$ ).

a) Prove que  $p(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - p(E_1) \times p(E_2 | E_1)$ .

b) Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser do naipe de espadas?

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**Nota:** Se o desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior; neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos  $E_1$  e  $E_2$ , no contexto da situação apresentada.

c) Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

13. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ( $A \subset S$  e  $B \subset S$ ).

Sabendo que A e B são independentes, prove que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \times p(\overline{A})$$

14. Uma caixa contém cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, indistinguíveis ao tacto.

Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os seguintes acontecimentos:

$B_1$  - a bola retirada em primeiro lugar é branca;

$B_2$  - a bola retirada em segundo lugar é branca.

Qual é o valor da probabilidade condicionada  $p(B_2 | B_1)$ ?

[A]  $\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$

[B]  $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$

[C]  $\frac{4}{9}$

[D]  $\frac{5}{9}$

## SOLUÇÕES

2.

- a) São dependentes.
- b) Só serão independentes se  $N$  for o conjunto de resultados, isto é, se  $p(N) = 1$ .
- c) São independentes.

3.  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{4}$  e  $\frac{3}{8}$ .

Os acontecimentos são independentes.

4.  $\frac{3}{5}$ .

5.  $\frac{1}{3}$

6.

- a)  $0,841 \times 0,159 \approx 0,134$
- b)  $0,37 \times 0,381 \approx 0,141$
- c)  $0,159 \times 0,159 \approx 0,0253$
- d)  $0,012 \times 0,062 \approx 0,00074$
- e)  $0,072 \div 0,453 \approx 0,159$

7.

- a1) 0,9
- a2) 0,1
- b) Não, visto  $p(E_1 \cap E_2) \neq p(E_1) \cdot p(E_2)$ .
- c)  $\frac{2}{3}$

8.

- a)  $\frac{2}{5}$
- b)  $p(A | B) = 1$

9.

- a)  $\frac{1}{6}$
- b)  $p(B | A) = \frac{5}{6}$

10.

- a) 0,336
- b)  $p((F_2 \cap C_2) | E_1) = \frac{3}{51}$

11.

- a) 1.656
- b) 10.350
- c)  $p(C | (A \cap B)) = \frac{13}{23}$

12.

- b)  $\frac{16}{17}$
- c) 4%

14. [C]

O Professor