Escola Secundária da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

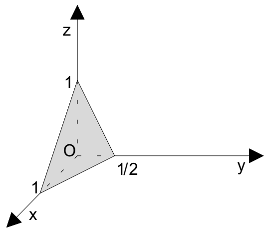
04/02/99 **Turma A - Prova 2** **11.º Ano**

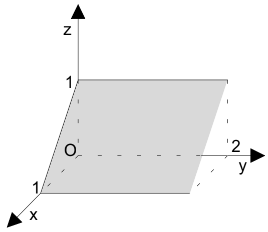
Nome: ____ *N.º:* ____ *Turma:* ___

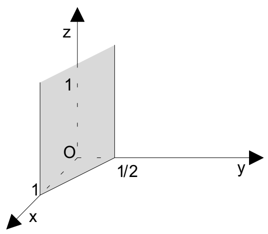
1.ª Parte

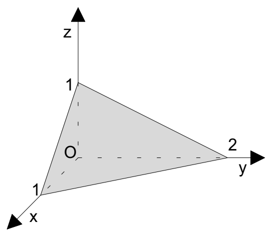
Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +10 pontos; cada resposta errada, -10/3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. A representação do plano α: $x + 2y + z = 1$ no primeiro octante de um referencial ortonormado é:

[E] 

[F] 

[G] 

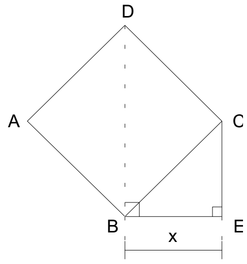
[H] 

2. O conjunto de pontos P (x, y) do plano que verificam a condição $\vec{PA}.\vec{PB} = 0$, sendo A (0, 2) e B (-2, 4), é:

[E] a recta que contém A e é perpendicular a [AB].
[F] a recta tangente à circunferência de centro em A, no seu ponto B.
[G] a mediatriz de [AB].
[H] a circunferência de diâmetro [AB].

3. Na figura, [ABCD] é um quadrado e [BCE] é um triângulo rectângulo.

O valor do produto escalar $\vec{DC}.\vec{BE}$ é:



[E] $\sqrt{2}.x^2$.   **[F]** x^2.

[G] $\dfrac{x^2}{2}$.   **[H]** $\dfrac{\sqrt{2}.x}{2}$.

4. O conjunto solução de $\operatorname{sen} x \geq \dfrac{1}{2} \quad \wedge \quad x \in [0, 2\pi]$ é:

[E] $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.   **[F]** $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.   **[G]** $\left[\dfrac{\pi}{6}, \pi\right]$.   **[H]** $\left[\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

5. Num referencial o. n. *Oxyz*, considere:

- a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$
- o plano de equação $z = 4$

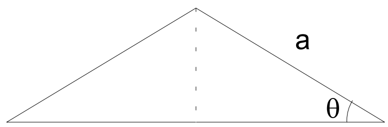
Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

[E] 6π . **[F]** π . **[G]** 9π . **[H]** 3π .

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares.
Cada peça é um triângulo <u>isósceles</u> de lado *a*, constante, como mostra a figura ao lado.



a) Mostre que a área de cada peça é dada, em função de θ, por:

$$A(\theta) = \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}(2\theta), \qquad \text{com } \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2};\ a > 0\right).$$

IMPORTANTE: Na parte final da sua dedução, tenha em consideração que $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x . \cos x$.

b) Explique por que, se o lado *a* de uma peça de tijoleira for menor que $\sqrt{2}$, a área da peça será inferior a 1, qualquer que seja o valor do ângulo θ .

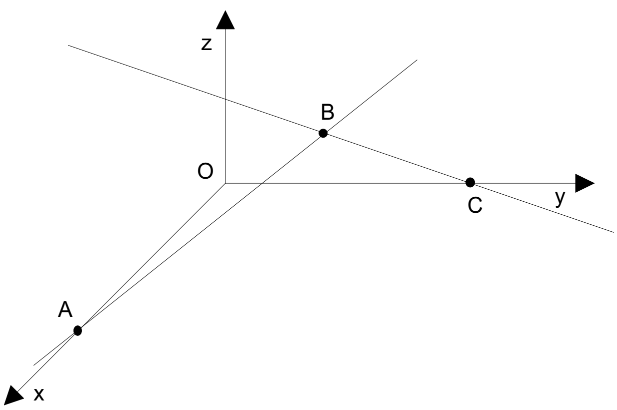
c) <u>Considere que o comprimento *a* é 20 cm</u>.

Resolva, em *IR*, a equação $A(\theta) = 100$.

Qual o valor (<u>exacto</u>) de θ (em graus) para o qual a área de cada peça é 100 cm^2 ?

2. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*:

- o ponto A (10, 0, 0)
- o ponto B (0, 2, 1)
- o ponto C (0, 5, 0)
- a recta AB
- a recta BC



a) Justifique que as rectas AB e BC são complanares e determine uma equação cartesiana do plano α por elas definido.

b) Determine uma equação vectorial da recta de intersecção do plano α com o plano *xOz*.

NOTA: Caso não tenha resolvido a alínea anterior, considere α: $x + 2y + 6z = 10$.

c) Determine $A\hat{B}C$, com aproximação à décima de grau.

d) Calcule o volume da pirâmide [OBCA].

3. Resolva, classifique e interprete geometricamente a solução do seguinte sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + 5z = 0 \\ 2x - y + z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

4. Considere o polinómio $P(x) = 2x^3 + 6x^2 - 8$.

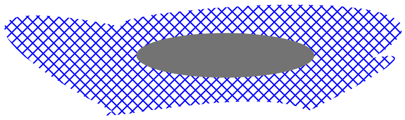
a) Aplicando o algoritmo da divisão inteira, determine o quociente e o resto da divisão de $P(x)$ por $B(x) = x^2 + 3$.

b) Aplicando a regra de Ruffini, mostre que $P(x) = 2.(x-1).(x+2)^2$.

5. Considere a seguinte função real de variável real: $x \to g(x) = \dfrac{2+3x}{x+1}$.

a) Mostre que $g(x) = 3 + \dfrac{-1}{x+1}$.
Descreva a sequência das transformações a utilizar para obter o gráfico da função *g* a partir do gráfico da função $y = \dfrac{1}{x}$.
Pronuncie-se sobre a monotonia e o comportamento da função quando *x* tende para $+\infty$.

b) Uma nódoa circular de tinta é detectada sobre um tecido.
O comprimento, em centímetros, do raio dessa nódoa, *t* segundos após ter sido detectada, é dado por:



$$r(t) = \frac{2+3t}{t+1} \quad (t \geq 0)$$

NOTA: Tenha em consideração o estudo da função *g*.

b1) Calcule o raio da nódoa no instante em que foi detectada.

b2) Indique, justificando, o menor comprimento, em centímetros, que o raio da nódoa nunca ultrapassará.

FIM

O Professor

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 50 pontos

Cada resposta certa .... +10 pontos

Cada resposta errada .... -10/3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	10	7	3	0	0	
	2	20	17	13	10		
	3	30	27	23			
	4	40	37				
	5	50					

2.ª Parte .... 150 pontos

1. .... 37 pontos
   - a) 12
   - b) 10
   - c) 15

2. .... 47 pontos
   - a) 15
   - b) 10
   - c) 12
   - d) 10

3. .... 20 pontos

4. .... 18 pontos
   - a) 8
   - b) 10

5. .... 28 pontos
   - a) 12
   - b1) 6
   - b2) 10

Total **200 pontos**