Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

04/02/99 **Turma A - Provas 1 e 2** **11.º Ano**

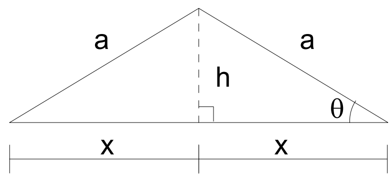
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**D**	**C**	**C**	**B**	**D**
Questão	*3*	*4*	*2*	*1*	*5*
Prova 2	**F**	**E**	**H**	**E**	**G**

2.ª Parte

1.



a) Tendo em conta as condições estabelecidas, da figura ao lado podemos obter:

$\operatorname{sen}\theta = \dfrac{h}{a}$ e $\cos\theta = \dfrac{x}{a}$, donde $h = a\operatorname{sen}\theta$ e $x = a\cos\theta$.

Logo, $A(\theta) = \dfrac{(2a\cos\theta)\times(a\operatorname{sen}\theta)}{2} = \dfrac{a^2 \times 2\operatorname{sen}\theta \times \cos\theta}{2} = \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$,

com ($0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$; $a > 0$), como pretendíamos mostrar.

b) Como $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, então $0 < 2\theta < \pi$ e, consequentemente, $0 < \operatorname{sen}(2\theta) \leq 1$.

Por outro lado, sendo $0 < a < \sqrt{2}$, então $0 < a^2 < 2$ e , portanto, $0 < \dfrac{a^2}{2} < 1$.

Logo, $0 < A(\theta) < 1$, pois o produto de um número positivo inferior a um por outro positivo e inferior ou igual a um é um número positivo inferior a um.

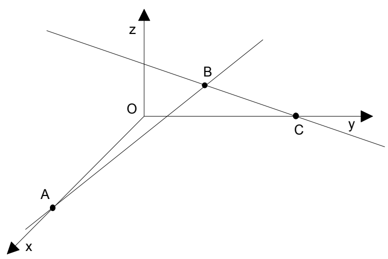
c) Considerando que o comprimento a é 20 cm, temos:

$$\begin{aligned}
A(\theta) = 100 \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{400}{2}\operatorname{sen}(2\theta) = 100 \\
&\Leftrightarrow \quad \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad 2\theta = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2\theta = (\pi - \frac{\pi}{6}) + 2k\pi, \quad k \in Z \\
&\Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad \theta = \frac{5\pi}{12} + k\pi, \quad k \in Z
\end{aligned}$$

Pretendemos as soluções da equação pertencentes ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, que são duas: $x = \dfrac{\pi}{12}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{12}$.

Portanto, obtém-se a área considerada para dois valores distintos de θ : 15º ou 75º.

2.

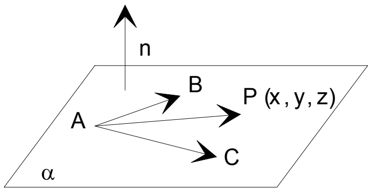


a) As rectas AB e BC são concorrentes em B, logo são complanares, pois duas rectas concorrentes definem um plano.

Ora, $\overrightarrow{AB} = (-10,2,1)$ e $\overrightarrow{AC} = (-10,5,0)$.

Designado por $\vec{n}_{\alpha} = (a,b,c)$ um vector genérico normal ao plano α, será:

$$\begin{cases}(a,b,c).(-10,2,1)=0\\(a,b,c).(-10,5,0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-10a+2b+c=0\\-10a+5b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3b=-c\\b=2a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3b\\b=2a\end{cases}$$



Portanto, $\vec{n}=(1,2,6)$ (por exemplo) é um vector normal a α.

Designado P (x, y, z) um ponto genérico do plano, os vectores $\overrightarrow{AP}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares, logo:

$$(x-10,y-0,z-0).(1,2,6)=0\Leftrightarrow x-10+2y+6z=0\Leftrightarrow x+2y+6z=10\ .$$

Portanto, $x+2y+6z=10$ é uma equação cartesiana do plano α.

b) Sendo o plano xOz definido pela condição $y=0$, então $\begin{cases}x+2y+6z=10\\y=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-6z+10\\y=0\end{cases}$ define de forma cartesiana a recta pretendida. Portanto, além do ponto A, é ponto desse plano o ponto D (4, 0, 1).

Assim, $(x,y,z)=(10,0,0)+k(-6,0,1),\ k\in IR$ é uma equação vectorial da recta pedida.

c) Tendo em consideração a definição do produto escalar de dois vectores, vem:

$$\cos(A\hat{B}C)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|.\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{(10,-2,-1).(0,3,-1)}{\sqrt{105}\times\sqrt{10}}=\frac{0-6+1}{\sqrt{3\times7\times5\times2\times5}}=-\frac{5}{5\sqrt{42}}=-\frac{\sqrt{42}}{42}\ .$$

Logo, $A\hat{B}C=98{,}9^{\circ}$, com aproximação à décima de grau.

d) Tendo em consideração que $V_{Pirâmide}=\frac{1}{3}\times \textit{Área da base}\times \textit{Altura}$, temos:

$$V=\frac{1}{3}\times\frac{\overline{OC}\times\overline{BE}}{2}\times\overline{AO}=\frac{1}{3}\times\frac{5\times1}{2}\times10=\frac{25}{3}$$ unidades de volume.

3.

$$\begin{matrix}(2)\\ \\ \end{matrix}\begin{cases}x+2y+5z=0\\2x-y+z=-1\\x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{matrix}(-3)\\(5)\\ \end{matrix}\begin{cases}5x+7z=-2\\3x+2z=1\\x+y+z=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-11z=11\\----\\----\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=-1\\x=1\\y=2\end{cases}.$$

$S=\{(1,2,-1)\}$; o sistema é possível determinado. Cada equação do sistema representa um plano e a intersecção dos três planos é o ponto de coordenadas $(1,2,-1)$.

4.

a)

$$\begin{array}{cccc|l}
2x^3 & +6x^2 & & -8 & x^2\ \ +3\\
-2x^3 & & -6x & & 2x\ \ +6\\
 & 6x^2 & -6x & -8 & \\
 & -6x^2 & & -18 & \\
 & & -6x & -26 &
\end{array}$$

Portanto, $q(x)=2x+6$ e $r(x)=-6x-26$.

b)

$$\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & 6 & 0 & -8\\
1 & & 2 & 8 & 8\\ \hline
 & 2 & 8 & 8 & 0\\
-2 & & -4 & -8 & \\ \hline
 & 2 & 4 & 0 & \\
-2 & & -4 & & \\ \hline
 & 2 & 0 & &
\end{array}$$

Portanto, $P(x)=2.(x-1).(x+2).(x+2)=2.(x-1).(x+2)^2$.

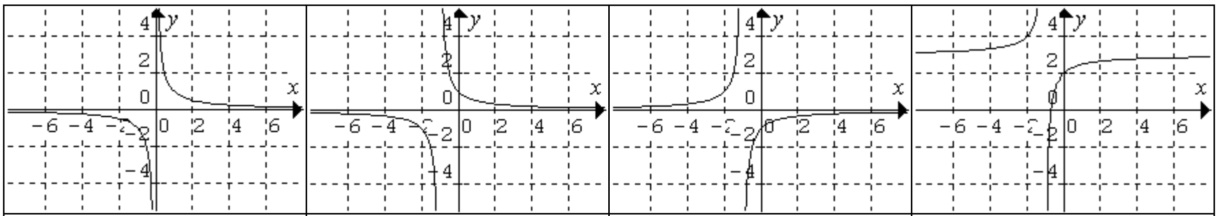
5.

a) Ora, $g(x)=\frac{2+3x}{x+1}=\frac{3(x+1)-1}{x+1}=3+\frac{-1}{x+1}$.

A partir do gráfico da função $y=\frac{1}{x}$ podemos obter o gráfico da função *g*, utilizando, por esta ordem (por exemplo), as seguintes transformações:

- Translação associada ao vector $\vec{u}=(-1,0)$;
- Simetria axial de eixo Ox;
- Translação associada ao vector $\vec{v}=(0,3)$.

As figuras seguintes ilustram o que acabámos de dizer.



$y=\frac{1}{x}$	$y_1=\frac{1}{x+1}$	$y_2=\frac{-1}{x+1}$	$g(x)=3+\frac{-1}{x+1}$

A função *g* é estritamente crescente em $]-\infty,-1[$, quer em $]-1,+\infty[$.
Quando $x\to+\infty$, $g(x)\to 3$. (A recta de equação $y=3$ é uma assimptota horizontal)

b1) A nódoa foi detectada no instante $t=0$ segundos.

Como $r(0)=\frac{2+3\times 0}{0+1}=2$, no instante em que foi detectada, a nódoa possuía um raio de 2 cm.

b2) Tendo em consideração o resultado da alínea anterior e o estudo efectuado sobre a função *g*, podemos concluir que:

- $r(0)=2$
- a função *r* é estritamente crescente no seu domínio
- quando $t\to+\infty$, $r(t)\to 3$

Logo, o menor comprimento que o raio da nódoa nunca ultrapassará é 3 cm.

FIM

---

(1) Como [BC] é a diagonal de um quadrado de lado *x*, será $\overline{BC}=x\sqrt{2}$. Logo, $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BE}=x\sqrt{2}\times x\times\cos 45^{\circ}=x^2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=x^2$.

(2) Visualize o círculo trigonométrico!

(3) Sem se preocupar com qualquer cálculo, esquematize geometricamente cada uma das situações descritas. Simples! Não?! (Ver páginas 91-94 do Livro de Texto e exercício 42 da página 124 - Volume1)

(4) Como sabe, três pontos não colineares definem um plano. Há dois planos representados que são paralelos a um dos eixos coordenados, pelo que é fácil considerar outros pontos de desse plano por forma a obter 3 pontos não colineares. Depois, apenas resta verificar qual dos planos é α, tendo em conta que as coordenadas de qualquer ponto dum plano verificam a equação desse plano.

(5) A intersecção considerada é o círculo definido por $x^2+y^2\le 9 \;\wedge\; z=4$. Isto é, um círculo de raio 3 unidades...
Em alternativa, pode fazer a representação num referencial e obter o raio do círculo por aplicação do teorema de Pitágoras.

O Professor