

# Escola Secundária da Sé-Lamego

## Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

10/12/98

Turma A - Provas 1 e 2

11.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

	1 <sup>(1)</sup>	2 <sup>(2)</sup>	3 <sup>(3)</sup>	4 <sup>(4)</sup>	5 <sup>(5)</sup>
<b>Questão</b>	1-a)	1-b)	2	3	4
<b>Prova 1</b>	D	B	A	A	D
<b>Questão</b>	3-a)	3-b)	2	1	4
<b>Prova 2</b>	E	E	H	G	F

### 2.ª Parte

1.

a)  $d(40) = 7 + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{40\pi}{30}\right) = 7 + 5 \operatorname{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 7 - 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) = 7 - 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{14 - 5\sqrt{3}}{2}$ .

Quarenta segundos após a roda ter começado a girar, a cadeira número 1 encontra-se aproximadamente a 2,7 metros do solo.

b)

$$d(t) = 9,5 \Leftrightarrow 7 + 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 9,5$$

$$\Leftrightarrow 5 \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right) = 2,5$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{30} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{\pi t}{30} = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 5 + 60k \quad \vee \quad t = 25 + 60k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

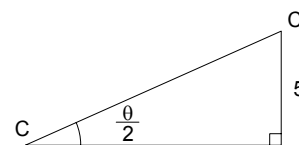
Para  $t \in [0, 75]$ , a equação tem as seguintes soluções: 5, 25 e 65.

Depois de a roda ter começado a girar, o Manuel demora 5 segundos a encontrar-se pela primeira a uma distância de 9,5 metros do solo, pois, de acordo com a equação acabada de resolver, a primeira vez que a cadeira número 1 se encontra a esta distância do solo ocorre 5 segundos depois de a roda ter iniciado o movimento de rotação.

2.

a) Considerando uma semi-recta com origem em C e paralela a  $t_1$ , obtemos o triângulo rectângulo representado na figura ao lado, donde  $\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{5}{CC'}$ .

Logo,  $\overline{CC'} = \frac{5}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$ , c.q.m..



b1) As circunferências são tangentes quando  $\overline{CC'} = 10 + 15 = 25$  centímetros. Tendo em atenção a consideração feita sobre a expressão, temos  $\operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{5}{25} \Leftrightarrow \operatorname{sen}\frac{\theta}{2} = \frac{1}{5}$ . Donde,  $\theta \approx 0,40$  radianos.

b2) Tendo em atenção a consideração feita sobre a expressão da alínea a), a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências ocorrerá quando for mínimo o quociente  $\frac{5}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$ , logo

quando for máximo  $\sin \frac{\theta}{2}$ . Quando  $\theta$  varia no intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\frac{\theta}{2}$  variará no intervalo  $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$ , assumindo  $\sin \frac{\theta}{2}$  todos os valores do intervalo  $\left]0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ . Assim, a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências é  $\frac{5}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$  centímetros.

3.

a) Os vectores  $\vec{u}$  e  $\vec{AC}$  são colineares, com sentidos opostos.

b1) Como  $\vec{DC} \cdot \vec{DB} = \|\vec{DC}\| \cdot \|\vec{DB}\| \cdot \cos \hat{BDC}$ ,  $\vec{DC} = (7, 0)$  e  $\vec{DB} = (7, -4)$  então:

$$\cos \hat{BDC} = \frac{(7, 0) \cdot (7, -4)}{7 \times \sqrt{49 + 16}} \Leftrightarrow \cos \hat{BDC} = \frac{49 + 0}{7 \times \sqrt{65}} \Leftrightarrow \cos \hat{BDC} = \frac{7}{\sqrt{65}}.$$

b2) Atendendo ao triângulo rectângulo [CDP], temos  $\cos \hat{BDC} = \frac{\overline{DP}}{\overline{DC}}$ , donde  $\overline{DP} = \cos \hat{BDC} \times \overline{DC}$ .

$$\text{Logo, } \overline{DP} = \frac{7}{\sqrt{65}} \times 7 = \frac{49\sqrt{65}}{65}, \text{ c.q.m..}$$

c) O declive da recta  $r$  é  $m_r = \frac{2}{-1} = -2$ , logo o declive de  $t$  é  $m_t = -\frac{1}{m_r} = \frac{1}{2}$ . Assim, a equação da recta  $t$  é do tipo  $y = \frac{1}{2}x + b$ . Dado que D (2, 6) é um ponto desta recta, será  $6 = \frac{1}{2} \times 2 + b \Leftrightarrow b = 5$ .

Portanto, a equação reduzida da recta  $t$  é  $y = \frac{1}{2}x + 5$ .

Como o declive duma recta é a tangente trigonométrica da sua inclinação, a inclinação de  $t$  é  $\alpha \approx 26,57^\circ$ .

4.

a) Como  $\vec{AC} = (0, -4, 2)$  e  $\vec{s} = (10, -3)$  são vectores directores das rectas consideradas, designando por  $\alpha$  o ângulo das duas rectas, será:

$$\cos \alpha = \frac{|(0, -4, 2) \cdot (10, -3)|}{\sqrt{20} \times \sqrt{10}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{|0 + 0 - 6|}{\sqrt{200}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{6}{10\sqrt{2}} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{10}, \text{ logo } \alpha \approx 64,9^\circ.$$

b) Como  $\vec{AF} = (-6, -3, 2)$ , então o vector  $\vec{u} = (0, 2, 3)$  (por exemplo) é perpendicular a  $\vec{AF}$ . Como  $\|\vec{u}\| = \sqrt{13}$ , então  $\vec{w} = 10 \times \frac{\vec{u}}{\sqrt{13}} = (0, \frac{20\sqrt{13}}{13}, \frac{30\sqrt{13}}{13})$  é um vector que satisfaz as condições requeridas.

c) Os pontos extremidade destes vectores definem uma circunferência de raio 2, centro em C, e pertencente ao plano coordenado xOz, a qual pode ser definida pela condição:  $(x - 6)^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4 \wedge y = 0$ .

(1) Se  $\text{tg } \alpha = -\frac{3}{4}$ , então  $\text{tg } \hat{B} = \frac{3}{4}$ . Logo,  $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{3}{4}$ . Como as razões trigonométricas não dependem do triângulo rectângulo considerado, podemos supor  $\overline{AC} = 3$  e  $\overline{AB} = 4$ , donde  $\overline{BC} = 5$  (pelo teorema de Pitágoras). Assim,  $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \hat{B} = \frac{3}{5}$ .

(2)  $\frac{\sin \hat{B} + \cos \hat{C}}{\cos \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{\sin \hat{B} + \sin \hat{B}}{\cos \hat{B} + \cos \hat{B}} = \frac{2 \sin \hat{B}}{2 \cos \hat{B}} = \text{tg } \hat{B}$ ;  $\frac{\sin \hat{B} + \cos \hat{C}}{\cos \hat{B} + \sin \hat{C}} = \frac{\cos \hat{C} + \cos \hat{C}}{\sin \hat{C} + \sin \hat{C}} = \frac{2 \cos \hat{C}}{2 \sin \hat{C}} = \frac{1}{\text{tg } \hat{C}}$   
e  $\sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \sin^2 \hat{A} \Leftrightarrow \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = \sin^2 90^\circ \Leftrightarrow \sin^2 \hat{B} + \cos^2 \hat{B} = 1$  (F.F.T.).

(3) A (0, 1) e B ( $\frac{3\pi}{2}$ , 0). Logo, sendo  $\vec{AB} = (-\frac{3\pi}{2}, 1)$  um vector director da recta AB, o seu declive é  $m = \frac{1}{-\frac{3\pi}{2}} = -\frac{2}{3\pi}$ .

(4)  $\vec{BC} \cdot \vec{BD} = 6 \times 6 \times \cos 60^\circ = 36 \times 0,5 = 18$ .

(5) Ora,  $\frac{1}{2} \vec{OA} = (\cos 120^\circ, \sin 120^\circ) = (-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  (imagine o círculo trigonométrico desenhado). Logo,  $\vec{OA} = (-1, \sqrt{3})$ .

O Professor