# Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

## Prova Escrita de Matemática A

**01/04/2011** **Turma A - Prova 1** **11.º Ano**

*Nome:* ______________________________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

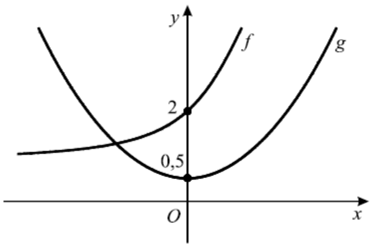
# 1.ª Parte

*Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.*
***Atenção!*** *Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.*

**1.** Na figura estão representadas, em referencial o.n. *xOy*, partes dos gráficos de duas funções, *f* e *g*, contínuas em $\mathbb{R}$ .
Tal como a figura sugere:

- Nenhum dos gráficos intersecta o eixo *Ox*;
- Os gráficos de *g* e de *f* intersectam o eixo *Oy* nos pontos de ordenadas $0{,}5$ e $2$ , respectivamente.

Apenas uma das equações seguintes é impossível. Qual delas?




**[A]** $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ **[B]** $f(x) + g(x) = 0$ **[C]** $f(x) \times g(x) = 1$ **[D]** $f(x) - g(x) = 0$

**2.** Num referencial o.n. *Oxyz*, considere os planos $\alpha : x - y + z = 2$ e $\beta : 3x - 3y + 3z = 1$.

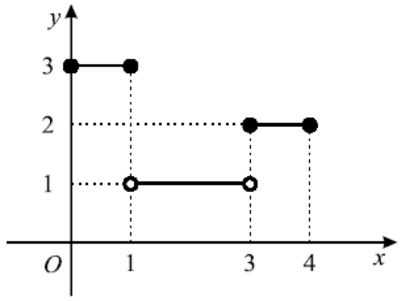
A intersecção dos planos $\alpha$ e $\beta$ é

**[A]** um plano **[B]** uma recta **[C]** um ponto **[D]** o conjunto vazio

**3.** Considere as seguintes funções:

- $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ , definida por $g(x) = x - 1$ ;
- $h : [0,4] \to \{1,2,3\}$ , cujo gráfico está representado ao lado.

Indique o valor de $h(3) + (h \circ g)(\pi)$ .

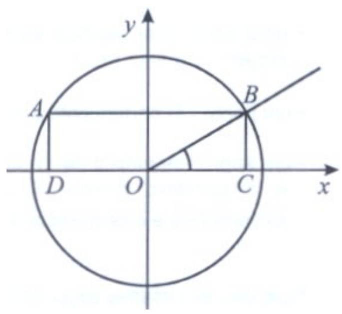



**[A]** 1 **[B]** 2
**[C]** 3 **[D]** 4

**4.** Na figura está representado o círculo trigonométrico e um rectângulo [ABCD].
O lado [CD] está contido no eixo das abcissas.
Os vértices A e B pertencem à circunferência.

Seja $\alpha$ a amplitude do ângulo BOC.

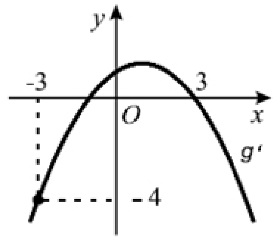
A área do rectângulo [ABCD] é igual a




**[A]** 2.*sen* $\alpha$ .*tg* $\alpha$ **[B]** 2.*sen* $\alpha$ .cos $\alpha$
**[C]** 2.*sen* $\alpha$ **[D]** 2.*tg* $\alpha$

**5.** Seja $g$ uma função de domínio $\mathbb{R}$, com derivada finita no seu domínio.

Na figura junta encontra-se parte do gráfico de $g'$, função <u>derivada</u> de $g$.
Sabe-se ainda que $g(0)=5$.




Qual pode ser o valor de $g(2)$?

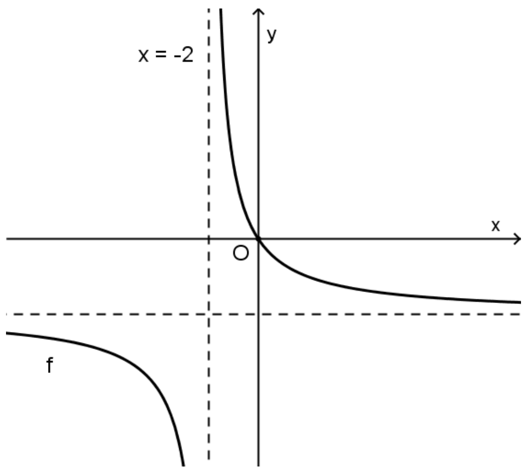
**[A]** 7 **[B]** 5

**[C]** 2 **[D]** 1

# 2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente* ***o seu raciocínio de forma clara****, indicando todos* ***os cálculos*** *que tiver de efectuar e* ***as justificações*** *que entender necessárias.*

**1.** Na figura está representada, em referencial o.n. *xOy*, parte do gráfico de uma função $f$, bem como as suas duas assimptotas.




Tal como a figura sugere,

- A origem do referencial pertence ao gráfico de $f$;
- Uma das assimptotas é paralela ao eixo *Ox*;
- A outra assimptota tem equação $x=-2$.

Considere ainda mais duas funções reais de variável real:

- $g(x)=-4x+8$, de domínio $\mathbb{R}$;
- $h(x)=\dfrac{x-1}{x+3}$, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

**a)** Tendo em conta o gráfico de $f$ e a expressão analítica de $g$, resolva a inequação $\dfrac{f(x)}{g(x)}\leq 0$, **completando** a seguinte tabela de variação de sinal, que deve **transcrever** para a sua folha de prova:

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |
| $g(x)$ | |
| $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ | |

Apresente o conjunto solução da inequação utilizando a notação de intervalos de números reais.

**b)** Admita agora que:

- a assimptota do gráfico de $f$ paralela ao eixo das abcissas tem equação $y=-3$;
- $f$ é definida por uma expressão do tipo $f(x)=a+\dfrac{b}{x-c}$, onde *a*, *b* e *c* designam números reais.

Justificando, indique os valores de *a* e *c* e determine o valor de *b*.

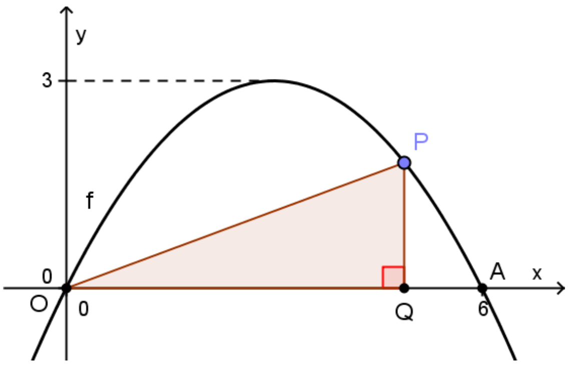
**c)** Seja $h'$ a função derivada de $h$. Sabe-se que $h'(x)=\dfrac{4}{(x+3)^2}$, com $D_{h'}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Averigúe a posição relativa das rectas *t* e *r*, respectivamente, a recta tangente ao gráfico de $h$ no ponto de abcissa $x=1$ e a recta que é o gráfico de $g$.

**Nota**: No caso de não conseguir obter uma equação da recta *t*, considere a recta de equação $x-4y-1=0$.

**d)** Caracterize $g\circ h$ e conclua que é uma função racional.

**2.** Na figura estão representados, em referencial o.n. *xOy*, uma parte do gráfico de uma função quadrática *f* e um triângulo rectângulo [OPQ].




Tal como a figura sugere, os pontos O e A são pontos de intersecção do gráfico de *f* com o eixo das abcissas e a recta PQ é perpendicular a este eixo.

Sabe-se ainda que:

- O ponto Q pertence ao eixo *Ox*;
- O ponto A tem abcissa 6;
- O vértice da parábola tem ordenada 3.

Admita que o ponto P se desloca no arco de parábola, entre a origem e o ponto A, nunca coincidindo com qualquer destes pontos. Com o movimento do vértice P, o vértice Q desloca-se no eixo *Ox*, de tal forma que o triângulo [OPQ] permanece sempre rectângulo.

Seja $x$ a **abcissa do ponto P**.

**a)** Seja $A(x)$ a área do triângulo [OPQ], em função de $x$ (com $x \in \left]0,6\right[$ ).

Mostre que $A(x) = x^2 - \dfrac{x^3}{6}$ .

**Sugestão**: Comece por obter uma expressão analítica da função *f*.

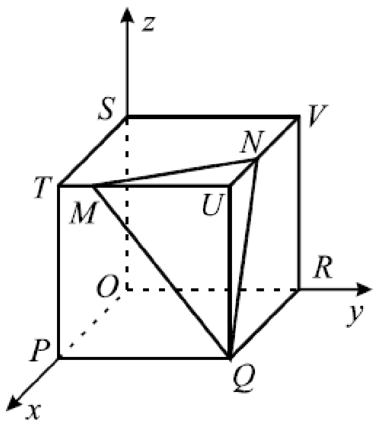
**b)** Utilizando a função derivada de $A$ e recorrendo a métodos exclusivamente analíticos, estude a função $A$ quanto à monotonia, conclua qual é o valor de $x$ para o qual é máxima a área do triângulo e determine essa área máxima.

**c)** Considere o seguinte problema:

*Quais os valores de x para os quais a área do triângulo [OPQ] é numericamente igual a* $\overline{OQ}$ *?*

Traduza o problema por meio de uma condição e, utilizando a sua calculadora, resolva-a graficamente.
Apresente os valores pedidos arredondados às milésimas.
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

**3.** Na figura está representada, em referencial o.n. *Oxyz*, um cubo [OPQRSTUV] de aresta 5.




Sabe-se ainda que:

- O vértice O do cubo coincide com a origem do referencial;
- Os vértices P, R e S do cubo pertencem aos semieixos positivos *Ox*, *Oy* e *Oz*, respectivamente;
- O triângulo escaleno [MNQ] é a secção produzida pelo plano $\alpha$ de equação $10x + 5y + 4z = 75$ .

**a)** Escreva uma equação vectorial da recta que passa por N e é perpendicular ao plano $\alpha$ .

**b)** Usando o produto escalar de dois vectores, determine a amplitude do ângulo TQV.

**c)** Considere a superfície esférica $\mathcal{E}$, de equação $(x-5)^2 + y^2 + z^2 = 2$ .

Para um certo valor de $\beta$ pertencente ao intervalo $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ , o ponto A de coordenadas $(5 - sen\,\beta,\ tg\,\beta,\ \cos\beta)$ pertence à superfície esférica $\mathcal{E}$. Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto A.

**FIM**

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** .................................................. 40 pontos

Cada questão com resposta certa .................................. 8 pontos

Cada questão com resposta errada, não respondida ou anulada .................. 0 pontos

**2.ª Parte** .................................................. 160 pontos

1. .................................................. 60 pontos
   - a) .................................................. 16
   - b) .................................................. 15
   - c) .................................................. 13
   - d) .................................................. 16

2. .................................................. 54 pontos
   - a) .................................................. 18
   - b) .................................................. 18
   - c) .................................................. 18

3. .................................................. 46 pontos
   - a) .................................................. 14
   - b) .................................................. 16
   - c) .................................................. 16

**Total** **200 pontos**

## Formulário

| **Áreas de figuras planas** | **Volumes** |
|---|---|
| Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$ | Prisma: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$ |
| Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$ | Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$ |
| Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$ | Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$ |
| Círculo: $\pi r^2$ | Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$ |
| | Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$ |