Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática A

07/12/2010 **Turma A - Prova 1** **11.º Ano**

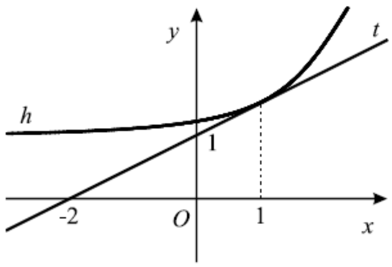
Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.*

1. Na figura estão representadas, em referencial o. n. *xOy*:

- parte do gráfico de uma função *h*;
- uma recta *t*, tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 1.



Tal como a figura sugere, a recta *t* intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa -2 e o eixo *Oy* no ponto de ordenada 1.

Indique o valor da inclinação da recta *t* (aproximação às décimas).

[A] $28{,}1^{\circ}$ **[B]** $26{,}6^{\circ}$ **[C]** $22{,}5^{\circ}$ **[D]** $18{,}4^{\circ}$

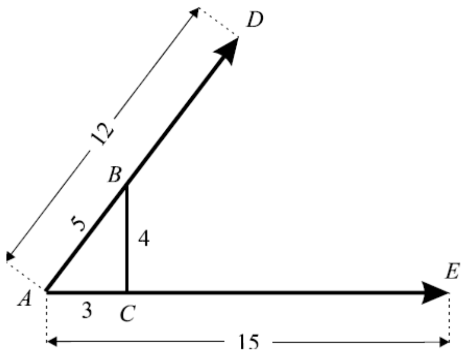
2. Considere a equação $1+tg\,(2x)=2$.
Qual dos seguintes valores é solução desta equação?

[A] $-\frac{\pi}{8}$ **[B]** $\frac{3\pi}{8}$ **[C]** $\frac{5\pi}{8}$ **[D]** $\frac{7\pi}{8}$

3. Na figura estão representados dois vectores, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$, de normas 12 e 15, respectivamente.

- No segmento de recta [AD] está assinalado um ponto B.
- No segmento de recta [AE] está assinalado um ponto C.
- O triângulo [ABC] é rectângulo e os seus lados têm 3, 4 e 5 unidades de comprimento.

Indique o valor do produto escalar $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$.



[A] 108 **[B]** 128
[C] 134 **[D]** 144

4. O conjunto de pontos *P* (*x*, *y*) do plano que verificam a condição $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB}=0$, sendo *A* (0, 2) e *B* (-2, 4), é:

[A] a mediatriz de [*AB*].
[B] a recta que contém *A* e é perpendicular a [*AB*].
[C] a circunferência de diâmetro [*AB*].
[D] a recta tangente à circunferência de centro em *A*, no seu ponto *B*.

5. Seja $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Qual das expressões seguintes designa um número positivo?

[A] $sen\,(\frac{3\pi}{2} - x)$ **[B]** $\cos(\pi - x)$ **[C]** $\cos(\frac{3\pi}{2} - x)$ **[D]** $sen\,(\pi - x)$

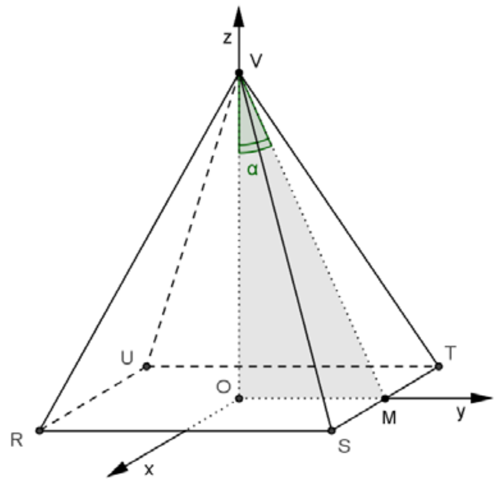
2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente ***o seu raciocínio de forma clara****, indicando todos* ***os cálculos*** *que tiver de efectuar e* ***as justificações*** *que entender necessárias.*

1. Na figura está representada, em referencial o. n. *Oxyz*, uma pirâmide quadrangular regular.

Sabe-se que:

- a base [RSTU] é um quadrado de área 4 com centro na origem do referencial;
- a aresta [RS] é paralela ao eixo *Oy*;
- M é o ponto médio da aresta [ST];
- o vértice V tem coordenadas $(0,0,c)$, com $c \in \mathbb{R}^+$;
- α designa a amplitude do ângulo OVM, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.



a) Mostre que a área total da pirâmide é dada, em função de α , por:

$$A(\alpha) = \frac{4 + 4\,sen\,\alpha}{sen\,\alpha} \qquad (\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\,)$$

b) Para um certo valor de α , sabe-se que $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Mostre que, para esse valor de α , a área total da pirâmide é $A = 4 + 2\sqrt{5}$.

c) Considere o seguinte problema:

Qual é o valor de α para o qual a área total da pirâmide é tripla da área da base?

Traduza o problema por meio de uma condição e, utilizando a sua calculadora, resolva-a graficamente.
Apresente o valor pedido arredondado às milésimas.
Apresente na sua resposta os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas relevantes de alguns pontos.

d) Admita agora que o vértice V tem coordenadas $(0,0,4)$.

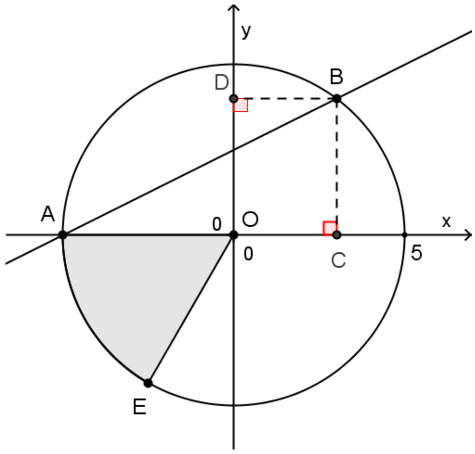
d1) Mostre que a recta *s*: $(x, y, z) = (4, -1, 3) + k\,(0, 4, 1)$, $k \in \mathbb{R}$ é perpendicular ao plano STV e determine uma equação cartesiana deste plano (STV).

d2) Considere a superfície esférica $\mathcal{E}$, de equação $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

Para um certo valor de β pertencente ao intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, o ponto P de coordenadas $(sen\,\beta,\ \cos\beta,\ 2 + tg\,\beta)$ pertence à superfície esférica $\mathcal{E}$.
Determine os valores numéricos das coordenadas do ponto P.

d3) Considere os pontos $Q(x, y, z)$ do espaço que satisfazem a condição $\overrightarrow{VQ} . \overrightarrow{OQ} = 0$.
Que lugar geométrico definem os pontos Q?
Caracterize-o por uma condição em *x*, *y* e *z*.

2. Na figura estão representadas, em referencial o. n. *xOy*, uma recta AB e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.



Sabe-se que:

- os pontos A, B e E pertencem à circunferência;
- o ponto A também pertence ao eixo das abcissas;
- os pontos C e D são as projecções ortogonais de B sobre os semieixos das abcissas e ordenadas, respectivamente.

a) Observe o triângulo rectângulo [ABC].
Mostre que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AC}^2$.

b) Admitindo que o declive da recta AB é igual a $\frac{1}{2}$, resolva as duas alíneas seguintes:

b1) Determine a equação reduzida da recta perpendicular a AB e que contém o ponto A.

b2) Considere a recta *r*: $(x, y) = (-1,3) + k(-3,1)$, $k \in \mathbb{R}$.
Determine a amplitude do ângulo formado pelas rectas AB e *r*.

3. Das questões seguintes, **resolva apenas uma**:

A) Considere o enunciado da questão **2**. (questão anterior)
Sabendo que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OE} = 12,5$, determine a área do sector circular sombreado.

B) Resolva e classifique o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = -10 \\ 2x - y + z = 6 \\ -x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas	**Volumes**
Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*
Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$	Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*
Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*	Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*
Círculo: πr^2	Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*
	Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$

COTAÇÕES

1.ª Parte	40 pontos
Cada questão com resposta certa	8 pontos
Cada questão com resposta errada, não respondida ou anulada	0 pontos
2.ª Parte	160 pontos
1.	100 pontos
a)	16
b)	16
c)	16
d1)	20
d2)	16
d3)	16
2.	45 pontos
a)	15
b1)	15
b2)	15
3.	15 pontos
Total	**200 pontos**