

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática A

10/11/2010

Turma A - Prova 2

11.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. Seja g uma função definida por $g(x) = tg x$.

Qual dos seguintes conjuntos poderá ser o domínio de g ?

- [A] $]\pi, 2\pi[$ [B] $]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}[$ [C] $]-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}[$ [D] $]0, \pi[$

2. Da amplitude α de um certo ângulo orientado sabe-se que $\text{sen } \alpha > 0$ e $\text{tg } \alpha < 0$.

Qual das expressões seguintes dá o valor de $\cos \alpha$?

- [A] $-\sqrt{1 + \text{sen}^2 \alpha}$ [B] $-\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$ [C] $\sqrt{1 + \text{sen}^2 \alpha}$ [D] $\sqrt{1 - \text{sen}^2 \alpha}$

3. Considere a equação trigonométrica $\text{sen } x = 1 - \sqrt{2}$.

Num dos intervalos seguintes, esta equação tem **apenas uma solução**. Em qual deles?

- [A] $[0, \pi]$ [B] $[0, \frac{\pi}{2}]$ [C] $[\pi, 2\pi]$ [D] $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$

4. A Inês olhou para o seu relógio quando este marcava 10 h e 15 min.

Passado algum tempo, ao ver novamente as horas, a Inês concluiu que o ponteiro dos minutos tinha rodado -3π radianos.

Que horas marcava o relógio da Inês, neste último instante?

- [A] 13 h e 45 min [B] 12 h e 15 min [C] 11 h e 45 min [D] 11 h e 15 min

5. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy :

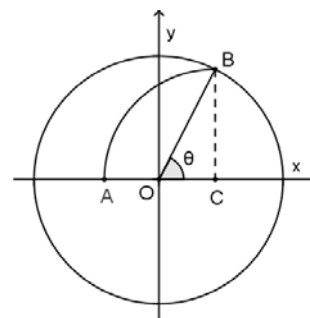
- o círculo trigonométrico;
- o raio $[OB]$ desse círculo;
- o arco de circunferência AB , de centro no ponto C .

Tal como a figura sugere, o ponto B pertence ao primeiro quadrante, os pontos A e C pertencem ao eixo Ox e a recta BC é perpendicular a este eixo.

Seja θ a amplitude do ângulo COB .

Qual é a abcissa do ponto A ?

- [A] $\cos \theta - \text{sen } \theta$ [B] $-1 + \cos \theta$ [C] $-\cos \theta$ [D] $-1 + \text{sen } \theta - \cos \theta$

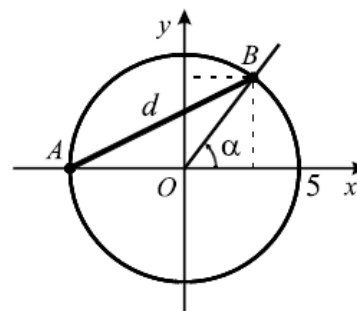


2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Na figura estão representadas, em referencial o. n. xOy , uma corda $[AB]$ e uma circunferência com centro na origem e raio igual a 5.

- O ponto A também pertence ao eixo das abcissas.
- α é a amplitude do ângulo orientado cujo lado origem é o semi-eixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semi-recta $\hat{O}B$.



a) Justifique que $\frac{\alpha}{2}$ e $\pi - \alpha$, em radianos, são as amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[AOB]$.

b) Mostre que $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{1 + \cos \alpha}$.

Sugestão: Tenha em consideração que, de acordo com a alínea anterior, $\widehat{B\hat{A}O} = \frac{\alpha}{2} \text{ rad}$.

c) Admita agora que o ponto B se desloca ao longo da circunferência, no primeiro quadrante.

Considere ainda:

- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, em radianos.
- d é o comprimento do segmento $[AB]$.

c1) Mostre que $d^2 = 50 + 50 \cos \alpha$.

Nota: Pode ser-lhe útil utilizar cálculos intermédios efectuados na resolução da alínea b).

c2) Determine o valor de α para o qual $\overline{AB} = 5\sqrt{3}$.

c3) Para um certo valor de α , sabe-se que $\operatorname{sen} \alpha = \frac{24}{25}$.

Determine, para esse valor de α , o perímetro do triângulo $[AOB]$.

2. Considere a expressão:

$$E(\alpha) = -2 \operatorname{sen} \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{2} - \alpha \right) - \operatorname{sen}(-\alpha + \pi) - 3 \cos(7\pi - \alpha).$$

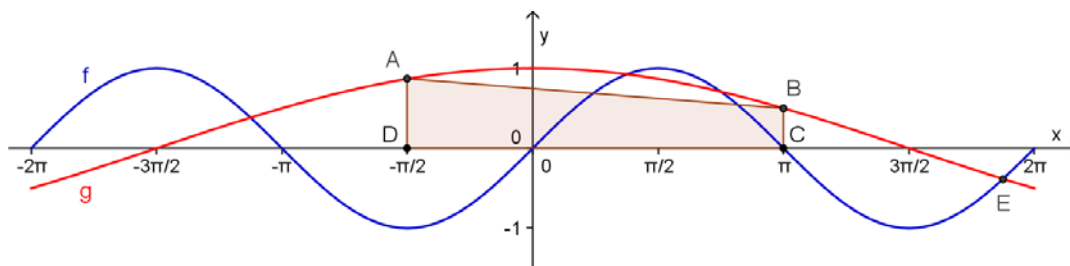
a) Mostre que $E(\alpha) = \cos \alpha - 2 \operatorname{sen} \alpha$.

b) Sabe-se que $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$ e que $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Determine o valor exacto de $E(\alpha)$.

Nota: Considere a expressão apresentada na alínea anterior.

3. Na figura estão as representações gráficas de duas funções, f e g , no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.



Sabe-se que:

- f é definida por $f(x) = \sin x$;
- g é definida por $g(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right)$;
- os pontos C e D têm coordenadas $(\pi, 0)$ e $(-\frac{\pi}{2}, 0)$, respectivamente;
- os pontos A e B são pontos do gráfico de g e têm abcissas $-\frac{\pi}{2}$ e π , respectivamente;
- E é um ponto de intersecção dos gráficos de f e de g .

Sem recorrer à calculadora, a não ser para efectuar eventuais cálculos numéricos, resolva as alíneas seguintes.

- No intervalo considerado, indique o conjunto-solução da condição $f(x) \times g(x) < 0$.
- Calcule a área do polígono [ABCD]. Além do valor exacto, apresente ainda o valor aproximado às centésimas.
- Determine a abcissa (valor exacto) do ponto E.

Sugestão: Comece por estabelecer uma condição que permita resolver o problema. De seguida, resolva essa condição e conclua sobre o valor pedido.

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas	Volumes
Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$	Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$	Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Círculo: πr^2	Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
	Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$

COTAÇÕES

1.ª Parte 40 pontos

Cada questão com resposta certa 8 pontos

Cada questão com resposta errada, não respondida ou anulada..... 0 pontos

2.ª Parte 160 pontos

1. 72 pontos

a) 12

b) 14

c1) 16

c2) 14

c3) 16

2. 36 pontos

a) 18

b) 18

3. 52 pontos

a) 12

b) 16

c) 24

Total 200 pontos