

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

01/04/2011

Turma A - Prova 1

11.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	B	D	C	B	A
Questão	4	3	5	2	1
Prova 2	A	A	B	C	D

2.ª Parte

1.

a)

Tendo em conta o gráfico de f e a expressão analítica de g , vem:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
$f(x)$	-	n.d.	+	0	-	-	-
$g(x)$	+	+	+	+	+	0	-
$\frac{f(x)}{g(x)}$	-	n.d.	+	0	-	n.d.	+

Portanto, o conjunto solução da inequação $\frac{f(x)}{g(x)} \leq 0$ é $S =]-\infty, -2[\cup [0, 2[$.

b)

Quando $x \rightarrow -\infty$ ou $x \rightarrow +\infty$, $\frac{b}{x-c} \rightarrow 0$. Logo, $f(x) = a + \frac{b}{x-c} \rightarrow a$.

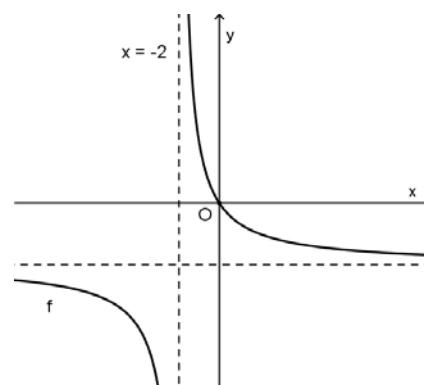
Dado que a assíntota horizontal tem equação $y = -3$, conclui-se que $a = -3$.

Por outro lado, $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Logo, $c = -2$.

Finalmente, como $f(0) = 0$, vem:

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{b}{0 - (-2)} = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2} = 3 \Leftrightarrow b = 6.$$

Portanto, $f(x) = -3 + \frac{6}{x+2}$.



c)

O declive da recta t é $m_t = h'(1) = \frac{4}{(1+3)^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$.

Como o declive da recta r é $m_r = -4$, tem-se $m_r = -\frac{1}{m_t}$, pelo que as rectas t e r são perpendiculares.

d)

$$D_{g \circ h} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in D_h \wedge h(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\} \wedge \left(\frac{x-1}{x+3} \right) \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}.$$

$$\text{Ora, } (g \circ h)(x) = g(h(x)) = -4 \times \frac{x-1}{x+3} + 8 = \frac{-4x+4}{x+3} + \frac{8x+24}{x+3} = \frac{4x+28}{x+3}.$$

$$g \circ h: \mathbb{R} \setminus \{-3\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{Portanto, } x \rightarrow \frac{4x+28}{x+3}.$$

A função é racional, pois é definida por uma expressão que é o quociente de dois polinómios.

2.

a)

Como $x=0$ e $x=6$ são os zeros de f , então a sua expressão analítica é da forma $f(x) = a(x-0)(x-6)$.

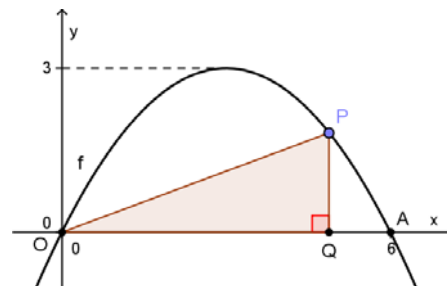
Dado que o vértice da parábola tem coordenadas $(3,3)$ (note que a recta de equação $x=3$ é o eixo de simetria da parábola), temos:

$$f(3) = 3 \Leftrightarrow a(3-0)(3-6) = 3 \Leftrightarrow -9a = 3 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Logo, } f(x) = -\frac{1}{3}(x-0)(x-6) = -\frac{x^2}{3} + 2x.$$

$$\text{Assim, } A(x) = \frac{\overline{OQ} \times \overline{PQ}}{2} = \frac{x \cdot \left(-\frac{x^2}{3} + 2x\right)}{2} = \frac{-\frac{x^3}{3} + 2x^2}{2} = x^2 - \frac{x^3}{6}.$$

(Note que P e Q têm a mesma abcissa x .)



b)

$$\text{Ora, } A'(x) = \left(x^2 - \frac{x^3}{6}\right)' = 2x - \frac{1}{6} \times 3x^2 = 2x - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Determinemos os zeros de } A': A'(x) = 0 \Leftrightarrow x\left(2 - \frac{x}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 4.$$

Assim, temos: (note que o gráfico de A' é um arco de parábola com a concavidade voltada para baixo)

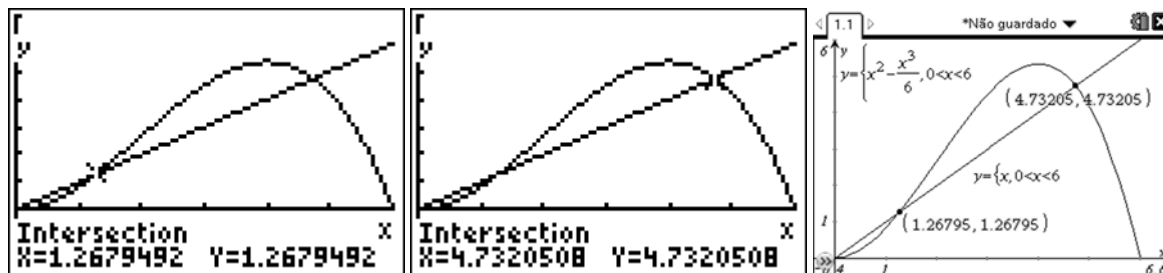
x	0		4		6
$A'(x)$	n.d.	+	0	-	n.d.
$A(x)$	n.d.	↗	$\frac{16}{3}$	↘	n.d.

$$\text{Portanto, a área do triângulo é máxima para } x = 4, \text{ sendo a área máxima } A(4) = 4^2 - \frac{4^3}{6} = 16 - \frac{64}{6} = \frac{32}{6} = \frac{16}{3}.$$

c)

Como já sabemos, $\overline{OQ} = x$. Logo, o problema pode ser traduzido pela equação $A(x) = x$.

Representadas graficamente a função A , no seu domínio, assim como $y = x$, determinaram-se as coordenadas dos pontos de intersecção dos seus gráficos:



Portanto, os valores pedidos são: $x_1 = 1,268$ e $x_2 = 4,732$.

(Note que 0 e 6 não pertencem a $D_A =]0,6[$.)

3.

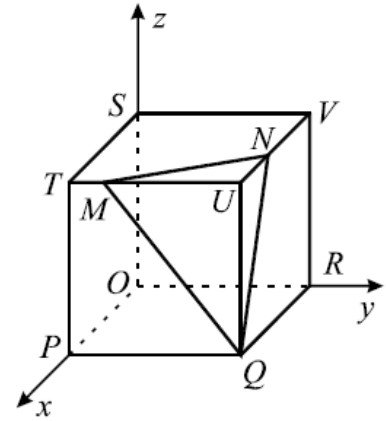
a)

A recta UV pode ser definida pela condição $y = 5 \wedge z = 5$.
O ponto N pertence a recta UV e ao plano α .

$$\text{Como } \begin{cases} y = 5 \\ z = 5 \\ 10x + 5y + 4z = 75 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 5 \\ z = 5 \\ x = 3 \end{cases}, \text{ então } N(3, 5, 5).$$

O vector $\vec{n} = (10, 5, 4)$ é normal ao plano α , logo é um vector director da recta pedida.

Assim, $(x, y, z) = (3, 5, 5) + k(10, 5, 4), k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta que passa por N e é perpendicular ao plano α .



b)

Como $T(5, 0, 5)$, $Q(5, 5, 0)$ e $V(0, 5, 5)$, então $\overline{QT} = (0, -5, 5)$ e $\overline{QV} = (-5, 0, 5)$.

Como $\overline{QT} \cdot \overline{QV} = \|\overline{QT}\| \cdot \|\overline{QV}\| \cdot \cos(T\hat{Q}V)$, vem:

$$\cos(T\hat{Q}V) = \frac{(0, -5, 5) \cdot (-5, 0, 5)}{\sqrt{0^2 + (-5)^2 + 5^2} \times \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 5^2}} = \frac{0 \times (-5) + (-5) \times 0 + 5 \times 5}{\sqrt{50} \times \sqrt{50}} = \frac{25}{50} = \frac{1}{2}.$$

Logo, $T\hat{Q}V = 60^\circ$.

c)

Se o ponto A pertence à superfície esférica \mathcal{E} , então as suas coordenadas têm de verificar a condição

$(x-5)^2 + y^2 + z^2 = 2$, com $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ora:

$$\begin{aligned} \begin{cases} (5 - \operatorname{sen} \beta - 5)^2 + (\operatorname{tg} \beta)^2 + (\cos \beta)^2 = 2 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta}^1 + \operatorname{tg}^2 \beta = 2 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \beta = 1 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \beta = -1 \vee \operatorname{tg} \beta = 1 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } A\left(5 - \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}, \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}, \cos \frac{\pi}{4}\right) = \left(5 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{10 - \sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

FIM

- (1) Como nenhum dos gráficos intersecta o eixo Ox e ambas as funções são contínuas em \mathbb{R} , então também são positivas em \mathbb{R} . Logo, a equação $f(x) + g(x) = 0$ é manifestamente impossível. (Cada uma das restantes equações é possível. Porquê?).
- (2) Os vectores $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 1)$ e $\vec{n}_\beta = (3, -3, 3)$, respectivamente, são normais aos planos α e β . Como estes vectores são colineares, então os dois planos são paralelos. Dado que as equações desses planos não são equivalentes, então os planos são estritamente paralelos. Consequentemente, a sua intersecção é o conjunto vazio.
- (3) Ora, $h(3) + (h \circ g)(\pi) = 2 + h(g(\pi)) = 2 + h(\pi - 1) = 2 + 1 = 3$.
- (4) Como $\overline{OC} = \cos \alpha$ e $\overline{BC} = \operatorname{sen} \alpha$, então $A_{ABCD] = 2 \times \overline{OC} \times \overline{BC} = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha$.
- (5) Por inspecção do gráfico, verifica-se que g' é positiva no intervalo $[0, 3[$. Consequentemente, neste mesmo intervalo, a função g é estritamente crescente, pelo que terá de ser $g(2) > g(0)$. Dado que $g(0) = 5$, então $g(2) > 5$.