

# Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

## Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

11/03/2011

Turma A - Provas 1 e 2

11.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

	1 <sup>(1)</sup>	2 <sup>(2)</sup>	3 <sup>(3)</sup>	4 <sup>(4)</sup>	5 <sup>(5)</sup>
<b>Questão</b>	1	2	3	4-a)	4-b)
<b>Prova 1</b>	D	C	A	B	A
<b>Questão</b>	3	4	1	2-a)	2-b)
<b>Prova 2</b>	A	B	D	C	B

### 2.ª Parte

1.

Ora,  $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2} - (-a)\right) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos(-a) = \frac{3}{5} \Leftrightarrow \cos a = \frac{3}{5}$ .

Como  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , então, pela fórmula fundamental da trigonometria,  $\sin a = +\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$ .

Logo,  $8 \operatorname{tg}(a) - 4 = 8 \times \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} - 4 = 8 \times \frac{4}{3} - \frac{12}{3} = \frac{20}{3}$ .

**Alternativa:**

Considerando que  $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ , vem  $1 + \operatorname{tg}^2 a = \frac{1}{\left(\frac{3}{5}\right)^2} \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a = \frac{25}{9} - 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 a = \frac{16}{9}$ .

Como  $a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ , então  $\operatorname{tg} a = +\sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{4}{3}$ .

Logo,  $8 \operatorname{tg}(a) - 4 = 8 \times \frac{4}{3} - \frac{12}{3} = \frac{20}{3}$ .

2.

a)

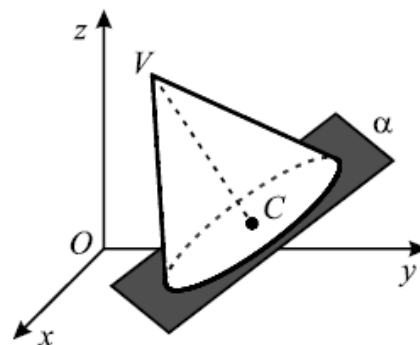
Um vector normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n} = (1, 2, -2)$ .

Logo, uma equação vectorial da recta que passa em V e é perpendicular a  $\alpha$  é  $(x, y, z) = (1, 2, 6) + k(1, 2, -2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

Como  $3 + 2 \times 6 - 2 \times 2 = 11 \Leftrightarrow 11 = 11$  e

$$(3, 6, 2) = (1, 2, 6) + k(1, 2, -2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = 1 + k \\ 6 = 2 + 2k \\ 2 = 6 - 2k \end{cases} \Leftrightarrow k = 2, \text{ o ponto de}$$

coordenadas  $(3, 6, 2)$  pertence simultaneamente ao plano  $\alpha$  e à recta acima referida. Ora, como esse ponto é C, as suas coordenadas são  $(3, 6, 2)$ .



**Alternativa:**

Um vector normal ao plano  $\alpha$  é  $\vec{n} = (1, 2, -2)$ .

Logo, uma equação cartesiana da recta que passa em V e é perpendicular a  $\alpha$  é  $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{-2}$ .

Ora,

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-6}{-2} \\ x+2y-2z=11 \end{cases} \Leftrightarrow (2x) \begin{cases} 2x-y=0 \\ y+z=8 \\ x+2y-2z=11 \end{cases} \Leftrightarrow (4x) \begin{cases} 2x-y=0 \\ y+z=8 \\ x+4y=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=0 \\ y+z=8 \\ 9x=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6 \\ z=2 \end{cases}$$

Logo, as coordenadas do ponto C são (3,6,2).

b)

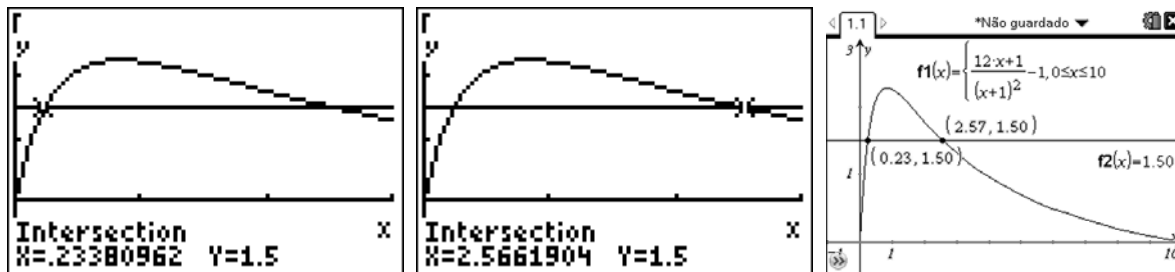
A base do cone é o círculo de intersecção do plano  $\alpha$  com a esfera de centro C e raio 3.

Logo, a base do cone pode ser definida pela condição  $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-2)^2 \leq 9 \wedge x+2y-2z=11$ .

3.

a)

Comecemos por representar graficamente a função no seu domínio, assim como a recta de equação  $y = 1,5$ . Seguidamente, determinemos as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com a recta de equação  $y = 1,5$  (numa janela de visualização mais adequada):



O ZITEX demora menos de 15 minutos (cerca de 14 minutos:  $0,23 h = 0,23 \times 60 \text{ min} = 13,8 \text{ min}$ ) a produzir efeito, o qual se mantém por um período superior a duas horas (aproximadamente  $(2,57 - 0,23) h = 2,34 h$ ). Portanto, o ZIETX satisfaz as condições estabelecidas.

b1)

Ora,  $a(1) = \frac{12 \times 1 + 1}{(1+1)^2} - 1 = \frac{13}{4} - 1 = \frac{9}{4} = 2,25$ .

Às 9 horas da manhã, a concentração de ZITEX era de  $2,25 \text{ mg/l}$  de sangue.

b2)

$$tmv_{[1,4]} = \frac{\left(\frac{12 \times 4 + 1}{(4+1)^2} - 1\right) - \left(\frac{12 \times 1 + 1}{(1+1)^2} - 1\right)}{4-1} = \frac{\frac{49}{25} - \frac{13}{4}}{3} = \frac{\frac{196 - 325}{100}}{3} = \frac{\frac{129}{100}}{3} = \frac{43}{100} = -0,43 \left(\frac{\text{mg/l}}{h}\right).$$

Entre as 9 e as 12 horas, a concentração de ZITEX diminuiu, em média,  $0,43$  miligramas por litro de sangue por hora.

4.

a)

$$\begin{aligned} f(x) \leq 2 &\Leftrightarrow -2 + \frac{4}{x+3} \leq 2 \\ &\Leftrightarrow -2 + \frac{4}{x+3} - 2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{4 - 4x - 12}{x+3} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-4x - 8}{x+3} \leq 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-3		-2	$+\infty$
$-4x-8$	+	+	+	0	-
$x+3$	-	0	+	+	+
$\frac{-4x-8}{x+3}$	-	n.d.	+	0	-

Portanto,  $f(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \in ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$ .

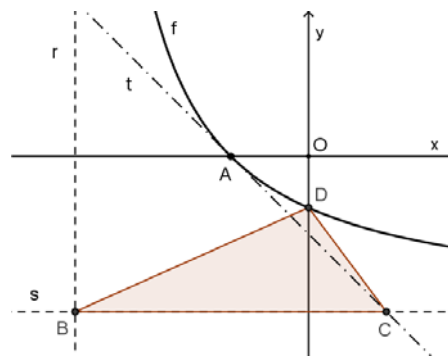
Logo,  $S = ]-\infty, -3[ \cup ]-2, +\infty[$ .

b)

Ora,

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow -2 + \frac{4}{x+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{-2x-6+4}{x+3} = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x-2 = 0 \wedge x+3 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x = -1 \end{aligned}$$

Logo,  $x = -1$  é o único zero da função.



c)

Seja  $h \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

$$\text{Ora, } \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \frac{\left(-2 + \frac{4}{-1+h+3}\right) - \left(-2 + \frac{4}{-1+3}\right)}{h} = \frac{\frac{4}{h+2} - 2}{h} = \frac{4 - 2h - 4}{h(h+2)} = -\frac{2h}{h(h+2)} = -\frac{2}{h+2}.$$

Quando  $h \rightarrow 0$ ,  $\frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \rightarrow -1$ . Logo,  $f'(-1) = -1$ .

d)

As equações das rectas  $r$  e  $s$  são, respectivamente,  $x = -3$  e  $y = -2$ . Logo,  $B(-3, -2)$ .

Como  $f(0) = -2 + \frac{4}{0+3} = -\frac{6}{3} + \frac{4}{3} = -\frac{2}{3}$ , então  $D(0, -\frac{2}{3})$ .

O declive da recta  $t$  é  $m_t = f'(-1) = -1$ , pelo que a sua equação reduzida é da forma  $y = -x + b$ .

Como o ponto  $A(-1, 0)$  pertence a esta recta, temos:  $0 = -1 \times (-1) + b \Leftrightarrow b = -1$ . Logo,  $t: y = -x - 1$ .

Como  $\begin{cases} y = -x - 1 \\ y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ , então  $C(1, -2)$ .

Assim, sendo  $D'$  a projecção ortogonal do ponto  $D$  sobre a recta  $BC$ , temos:

$$A_{[BCD]} = \frac{\overline{BC} \times \overline{DD'}}{2} = \frac{4 \times (2 - \frac{2}{3})}{2} = 2 \times (2 - \frac{2}{3}) = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3}.$$

**FIM**

- (1) Os vectores  $\vec{r} = (2, 0)$  e  $\vec{s} = (3, 4)$  são directores das rectas  $r$  e  $s$ , respectivamente. Dado que  $\vec{r} = (2, 0)$  tem a direcção do semieixo positivo  $Ox$ , então o ângulo das duas rectas é igual à inclinação da recta  $s$ , pois tem amplitude de um ângulo agudo. Portanto, o valor procurado é  $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53^\circ$ .
- (2) Para  $L = 3$ , obtém-se  $3 = x + 3y \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x + 3$  (equação da recta que passa nos pontos de coordenadas  $(0, 3)$  e  $(9, 0)$ ). Logo, a solução óptima é o par  $(4, 3)$ , pois todas as rectas da família são paralelas a esta última. Assim, o máximo que a função objectivo pode alcançar é  $4 + 3 \times 3 = 13$ .
- (3) Ora,  $f'(x_0)$  é negativa num ponto de abscissa  $x_0 \in ]a, b[$  se e só se  $f$  é decrescente em  $]a, b[$ . Dado que  $f$  é crescente em  $]-\infty, 3[$  e decrescente em  $]3, +\infty[$ , então apenas  $f'(4)$  será negativa. Em alternativa, basta ter em consideração que  $f'(x_0)$ , caso exista, corresponde ao declive da recta tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abscissa  $x_0$ .
- (4)  $R_{[POR]} = \overline{OP} + \overline{PR} + \overline{OR} = 1 + 1 + 2 \times \cos \alpha = 2(1 + \cos \alpha)$ .
- (5)  $\overline{PO} \cdot \overline{PR} = \|\overline{PO}\| \times \|\overline{PR}\| \times \cos \widehat{OPR} = 1 \times 1 \times \cos(\pi - \alpha - \alpha) = \cos(\pi - 2\alpha) = -\cos(2\alpha)$ .