

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

07/12/2010

Turma A - Provas 1 e 2

11.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	B	C	A	B	D
Questão	4	5	1	3	2
Prova 2	C	B	D	A	B

2.ª Parte

1.

a)

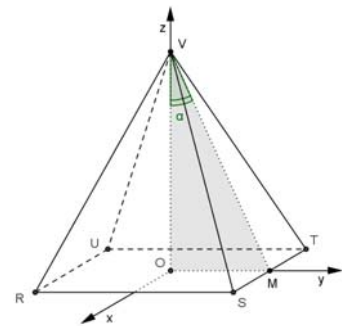
No triângulo rectângulo [MOV], tem-se: $\text{sen } \alpha = \frac{\overline{OM}}{\overline{MV}}$.

Obtém-se, assim, $\text{sen } \alpha = \frac{1}{MV} \Leftrightarrow \boxed{MV = \frac{1}{\text{sen } \alpha}}$.

A área do triângulo [STV] é dada por:

$$A_{[STV]} = \frac{\overline{ST} \times \overline{MV}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\text{sen } \alpha}}{2} = \frac{2}{\text{sen } \alpha} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{\text{sen } \alpha}.$$

Logo, $A(\alpha) = A_b + 4 \times A_{[STV]} = 4 + 4 \times \frac{1}{\text{sen } \alpha} = \frac{4 \text{sen } \alpha + 4}{\text{sen } \alpha} = \frac{4 + 4 \text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha}, (\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[)$.



b)

Como $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$, então $\text{sen } \alpha = +\sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \sqrt{\frac{20}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Para este valor de α , a área total da pirâmide é:

$$A = \frac{4 + 4 \times \frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{4 + \frac{8\sqrt{5}}{5}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{20 + 8\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \frac{10 + 4\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5} + 4 \times 5}{5} = 4 + 2\sqrt{5}.$$

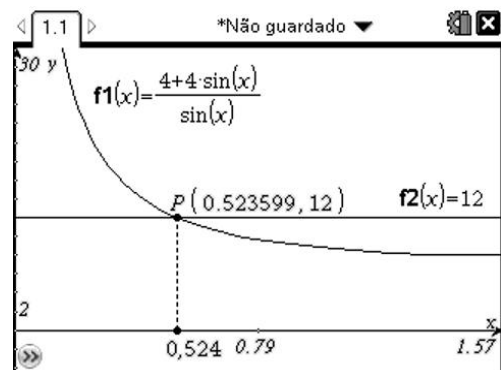
c)

Como a área da base é 4, então o problema pode ser traduzido pela condição $\frac{4 + 4 \text{sen } \alpha}{\text{sen } \alpha} = 12 \wedge \alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

Representadas graficamente as funções $f_1(x) = \frac{4 + 4 \text{sen } x}{x}$ e

$f_2(x) = 12$, no intervalo $]0, \frac{\pi}{2}[$, determinou-se a abcissa do ponto P, ponto de intersecção dos seus gráficos.

Portanto, a área total da pirâmide é tripla da área da base para $\alpha \approx 0,524$ radianos.



d1)

Uma recta é perpendicular a um plano se for perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano. Portanto, uma recta é perpendicular a um plano se um vector director da recta for perpendicular as dois vectores não colineares do plano.

Ora, como $V(0,0,4)$, $S(1,1,0)$ e $T(-1,1,0)$, então $\overline{VS} = (1,1,-4)$ e $\overline{VT} = (-1,1,-4)$ são dois vectores não colineares do plano STV.

Vejamos se o vector $\vec{s} = (0,4,1)$, um vector director da recta s , é perpendicular aos vectores \overline{VS} e \overline{VT} , isto é, se $\vec{s} \cdot \overline{VS} = 0$ e $\vec{s} \cdot \overline{VT} = 0$:

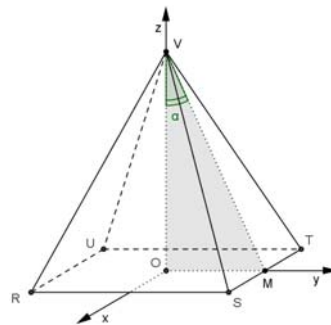
$$\vec{s} \cdot \overline{VS} = (0,4,1) \cdot (1,1,-4) = 0 + 4 \times 1 + 1 \times (-4) = 0 \text{ e}$$

$$\vec{s} \cdot \overline{VT} = (0,4,1) \cdot (-1,1,-4) = 0 + 4 \times 1 + 1 \times (-4) = 0.$$

Como $\vec{s} \perp \overline{VS}$ e $\vec{s} \perp \overline{VT}$, então a recta s é perpendicular ao plano STV.

Designado por $P(x,y,z)$ um ponto genérico do plano STV, tem-se $\overline{VP} \cdot \vec{s} = 0$.

Como $\overline{VP} \cdot \vec{s} = 0 \Leftrightarrow (x-0, y-0, z-4) \cdot (0,4,1) = 0 \Leftrightarrow 4y + z - 4 = 0$, a equação $4y + z - 4 = 0$ é uma equação cartesiana do plano STV.



d2)

Se o ponto P pertence a superfície esférica \mathcal{E} , então as suas coordenadas têm de verificar a condição

$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$, com $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. Ora:

$$\begin{cases} (\sin \beta)^2 + (\cos \beta)^2 + (2 + \operatorname{tg} \beta - 2)^2 = 4 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overbrace{\sin^2 \beta + \cos^2 \beta}^1 + \operatorname{tg}^2 \beta = 4 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg}^2 \beta = 3 \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \beta = -\sqrt{3} \vee \operatorname{tg} \beta = \sqrt{3} \\ \beta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases} \Leftrightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$$

Portanto, $P\left(\sin \frac{\pi}{3}, \cos \frac{\pi}{3}, 2 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 2 + \sqrt{3}\right)$.

d3)

O lugar geométrico definido é a superfície esférica \mathcal{E} (considerada na alínea anterior), de raio 2 e centro no ponto médio de [OV], ponto de coordenadas $(0,0,2)$. Pois, com efeito, tem-se:

$$\begin{aligned} \overline{VQ} \cdot \overline{OQ} = 0 &\Leftrightarrow (x-0, y-0, z-4) \cdot (x-0, y-0, z-0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4 \end{aligned}$$

2.

a)

Ora, $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = (\overline{AC} + \overline{CB}) \cdot \overline{AC} = \overline{AC} \cdot \overline{AC} + \overline{CB} \cdot \overline{AC} = \overline{AC}^2$, pois

$\overline{AC} \cdot \overline{AC} = \|\overline{AC}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos 0^\circ = \overline{AC}^2$ e $\overline{CB} \cdot \overline{AC} = \|\overline{CB}\| \times \|\overline{AC}\| \times \cos 90^\circ = 0$.

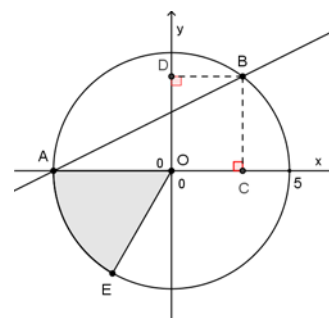
b1)

Como $m_{AB} = \frac{1}{2}$, então o declive da recta pedida é $m = -\frac{1}{m_{AB}} = -2$, pelo

que a sua equação reduzida é da forma $y = -2x + b$.

Como o ponto $A(-5,0)$ é um ponto desta recta, temos $0 = -2 \times (-5) + b \Leftrightarrow b = -10$.

Logo, $y = -2x - 10$ é a equação reduzida da recta pedida.



Alternativa:

Como $m_{AB} = \frac{1}{2}$, então o vector $\vec{u} = (2,1)$ é um vector director da recta AB.

Designado por $P(x,y)$ um ponto genérico da recta pedida, tem-se: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$.

Como $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \Leftrightarrow (2,1) \cdot (x+5, y-0) = 0 \Leftrightarrow 2x+10+y=0 \Leftrightarrow y = -2x-10$, então a equação reduzida da recta pedida é $y = -2x-10$.

b2)

Como vimos na alínea anterior, $\vec{u} = (2,1)$ é um vector director da recta AB.

Um vector director da recta r é o vector $\vec{r} = (-3,1)$.

$$\text{Ora, } \cos(\widehat{\vec{u}\vec{r}}) = \frac{(2,1) \cdot (-3,1)}{\sqrt{2^2+1^2} \times \sqrt{(-3)^2+1^2}} = \frac{2 \times (-3) + 1 \times 1}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{-5}{\sqrt{50}} = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Logo, sendo $\widehat{\vec{u}\vec{r}} = 135^\circ$, o ângulo das duas rectas tem de amplitude $\alpha = 180^\circ - \widehat{\vec{u}\vec{r}} = 45^\circ$.

3.

A)

Ora, $\overline{OA} \cdot \overline{OE} = 12,5 \Leftrightarrow 5 \times 5 \times \cos(\widehat{\overline{OA} \overline{OE}}) = 12,5 \Leftrightarrow \cos(\widehat{\overline{OA} \overline{OE}}) = \frac{1}{2}$. Logo, $\widehat{\overline{OA} \overline{OE}} = 60^\circ$.

Assim, a área do sector circular considerado é a sexta parte da área do círculo, ou seja, $\frac{\pi \times 5^2}{6} = \frac{25\pi}{6}$.

B)

$$\begin{array}{l} (1 \times) \left\{ \begin{array}{l} x+2y-3z=-10 \\ 2x-y+z=6 \end{array} \right. \\ (+) \left\{ \begin{array}{l} x+2y-3z=-10 \\ y+5z=14 \end{array} \right. \\ (2 \times) (+) \left\{ \begin{array}{l} -x+y+2z=4 \\ 3y-z=-6 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x+2y-3z=-10 \\ y+5z=14 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x+2y-3z=-10 \\ y+5z=14 \\ -16z=-48 \end{array} \right. \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=3 \end{array} \right. \end{array}$$

O sistema é possível e determinado; o conjunto-solução é $S = \{(1, -1, 3)\}$.

FIM

(1) O declive de uma recta não paralela ao eixo Oy é a tangente da sua inclinação.

Assim, a inclinação da recta t é $\alpha = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1-0}{0-(-2)}\right) = \text{tg}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26,6^\circ$.

(2) Ora, $1 + \text{tg}(2x) = 2 \Leftrightarrow \text{tg}(2x) = 1$.

Verifica-se: $\text{tg}\left(2 \times \left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = \text{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1 \neq 1$, $\text{tg}\left(2 \times \frac{3\pi}{8}\right) = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \neq 1$, $\text{tg}\left(2 \times \frac{5\pi}{8}\right) = \text{tg}\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ e

$\text{tg}\left(2 \times \frac{7\pi}{8}\right) = \text{tg}\left(\frac{7\pi}{4}\right) = \text{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1 \neq 1$.

(3) Aplicando a definição de produto escalar de dois vectores, vem:

$$\overline{AD} \cdot \overline{DE} = \|\overline{AD}\| \times \|\overline{DE}\| \times \cos(\widehat{DAE}) = 12 \times 15 \times \frac{3}{5} = 12 \times 9 = 108.$$

(4) Ilustre geometricamente o enunciado apresentado.

(5) Se $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, então:

$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0$, pois o ângulo é do 3.º Q;

$\cos(\pi - x) < 0$ pois o ângulo é do 2.º Q;

$\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) < 0$, pois o ângulo é do 3.º Q;

$\text{sen}(\pi - x) > 0$, pois o ângulo é do 2.º Q.