Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

11/10/2010 **Turma A - Provas 1 e 2** **11.º Ano**

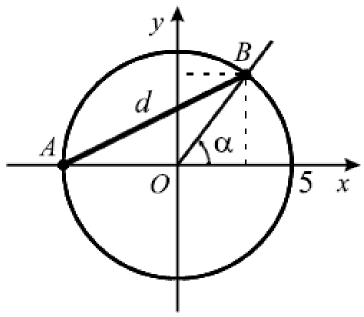
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**D**	**C**	**A**	**B**
Questão	*3*	*5*	*2*	*1*	*4*
Prova 2	**D**	**A**	**B**	**C**	**C**

2.ª Parte

1.



a)

O ângulo AOB é suplementar do ângulo de amplitude α assinalado na figura, logo $A\hat{O}B = \pi - \alpha$ (em radianos).

Como os segmentos [AO] e [OB] são raios da mesma circunferência, então o triângulo [OAB] é isósceles. Consequentemente, os ângulos opostos a estes lados são geometricamente iguais, pois, num triângulo, a lados geometricamente iguais opõem-se ângulos geometricamente iguais.

Sabendo, ainda, que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso, tem-se: $B\hat{A}O = A\hat{B}O = \dfrac{\pi - A\hat{O}B}{2} = \dfrac{\pi - (\pi - \alpha)}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$ (em radianos).

b)

Seja B' a projecção ortogonal do ponto B sobre o eixo *Ox*.

Relativamente ao ângulo agudo BAB' do triângulo rectângulo [ABB'], tem-se: $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AB'}} = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{AO} + \overline{OB'}}$ (1).

Por outro lado, relativamente ao triângulo rectângulo [OBB'], tem-se: $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OB'}}{\overline{OB}}$ e $sen\,\alpha = \dfrac{\overline{BB'}}{\overline{OB}}$.

Obtém-se, assim, $\cos\alpha = \dfrac{\overline{OB'}}{5} \Leftrightarrow \boxed{\overline{OB'} = 5\cos\alpha}$ e $sen\,\alpha = \dfrac{\overline{BB'}}{5} \Leftrightarrow \boxed{\overline{BB'} = 5\,sen\,\alpha}$.

Logo, substituindo em (1) os valores encontrados, vem: $tg\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{5\,sen\,\alpha}{5 + 5\cos\alpha} = \dfrac{5\,sen\,\alpha}{5(1+\cos\alpha)} = \dfrac{sen\,\alpha}{1 + 5\cos\alpha}$, c.q.m.

c1)

Da alínea b), sabemos que $\boxed{\overline{OB'} = 5\cos\alpha}$ e que $\boxed{\overline{BB'} = 5\,sen\,\alpha}$.

Logo, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [ABB'], temos:

$$
\begin{aligned}
d^2 = \overline{AB'}^2 + \overline{BB'}^2 \quad &\Leftrightarrow \quad d^2 = (5 + 5\cos\alpha)^2 + (5\,sen\,\alpha)^2 \\
&\Leftrightarrow \quad d^2 = 25 + 50\cos\alpha + 25\cos^2\alpha + 25\,sen^2\,\alpha \\
&\Leftrightarrow \quad d^2 = 25 + 50\cos\alpha + 25(\cos^2\alpha + sen^2\,\alpha) \\
&\Leftrightarrow \quad d^2 = 25 + 50\cos\alpha + 25 \times 1 \\
&\Leftrightarrow \quad d^2 = 50 + 50\cos\alpha
\end{aligned}
$$

c2)

Para $\overline{AB} = 5\sqrt{3}$, vem: $(5\sqrt{3})^2 = 50 + 50\cos\alpha \Leftrightarrow 75 = 50 + 50\cos\alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{75-50}{50} \Leftrightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Dado que $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, então $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ radianos.

c3)

Como $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, então $\cos\alpha = +\sqrt{1-\left(\dfrac{24}{25}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{625-576}{625}} = \sqrt{\dfrac{49}{625}} = \dfrac{7}{25}$.

Para este valor de α , o perímetro do triângulo [AOB] é $P(\alpha) = 5+5+\sqrt{50+50\times\dfrac{7}{25}} = 10+\sqrt{64} = 18$.

2.

a)

$$
\begin{aligned}
E(\alpha) &= -2sen\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right) - \cos\left(2\pi+\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + sen(-\alpha) - 3\cos(\pi-\alpha) \\
&= -2\cos(-\alpha) - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) - sen\,\alpha + 3\cos\alpha \\
&= -2\cos\alpha - sen\,\alpha - sen\,\alpha + 3\cos\alpha \\
&= \cos\alpha - 2sen\,\alpha
\end{aligned}
$$

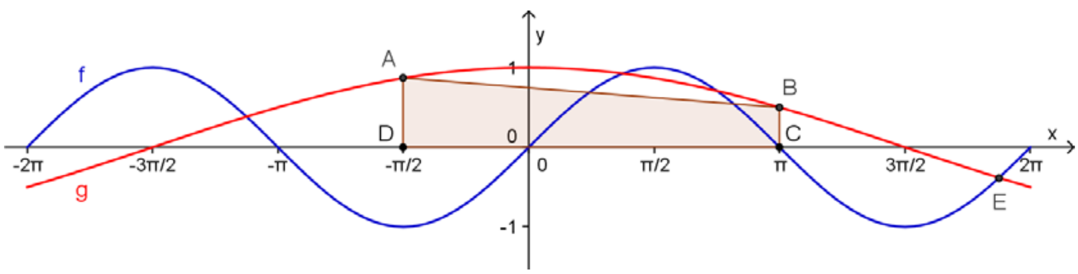
b)

Considerando que $1+tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ e $tg\,\alpha = -2\sqrt{2}$, vem $1+(-2\sqrt{2})^2 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow 1+8 = \dfrac{1}{\cos^2\alpha} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{1}{9}$.

Dado que $\alpha \in 4.^{o}Q$, então $\cos\alpha = +\sqrt{\dfrac{1}{9}} = \dfrac{1}{3}$ e $sen\,\alpha = -\sqrt{1-\dfrac{1}{9}} = -\sqrt{\dfrac{8}{9}} = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo, $E(\alpha) = \dfrac{1}{3} - 2\times\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \dfrac{1+4\sqrt{2}}{3}$.

3.



a)

No intervalo considerado, $f(x)\times g(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\left]-2\pi, -\dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]-\pi, 0\right[\cup \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[\right)$.

Logo, no intervalo considerado, o conjunto-solução da condição é $S = \left]-2\pi, -\dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]-\pi, 0\right[\cup \left]\pi, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

b)

Como $g\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = \cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right) = \cos\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, então $A\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Como $g(\pi) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$, então $A\left(\pi, \dfrac{1}{2}\right)$.

Dado que o polígono [ABCD] é um trapézio rectângulo, a sua área é:

$$A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AD}+\overline{BC}}{2}\times\overline{CD} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}}{2}\times\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{4}\times\frac{3\pi}{2} = \frac{3\pi(1+\sqrt{3})}{8} \simeq 3,22 \text{ .}$$

c)

A abcissa do ponto E satisfaz a seguinte condição: $f(x) = g(x) \wedge x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

Ora,

$$\begin{aligned} sen\, x = \cos(\frac{x}{3}) &\Leftrightarrow sen\, x = sen\,(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}) \\ &\Leftrightarrow x = (\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}) + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi - (\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow \frac{4x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \frac{2x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + \frac{3k\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{3\pi}{4} + 3k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Atribuindo valores convenientes a *k*, obtém-se:

$$k = 0: \quad \cancel{x = \frac{3\pi}{8}} \quad \vee \quad \cancel{x = \frac{3\pi}{4}}$$

$$k = 1: \quad x = \frac{15\pi}{8} \quad \vee \quad \cancel{x = \frac{15\pi}{4}}$$

Portanto, a abcissa do ponto E é $\frac{15\pi}{8}$.

FIM

---

(1) Note que $-1 < 1 - \sqrt{2} < 0$. Logo, a equação $sen\, x = 1 - \sqrt{2}$:

- é impossível no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$;
- é impossível no intervalo $[0, \pi]$;
- tem apenas uma solução no intervalo $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$;
- tem duas soluções no intervalo $[\pi, 2\pi]$.

(2) Ora, $\overline{OC} = \cos\theta$ e $\overline{AC} = \overline{BC} = sen\,\theta$, pois $\overline{OB} = 1$.
Logo, $x_A = x_C - \overline{BC} = \cos\theta - sen\,\theta$.

(3) Se $sen\,\alpha > 0$ e $tg\,\alpha < 0$, então $\cos\alpha < 0$, pois $tg\,\alpha = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$, para $\cos\alpha \neq 0$.
(Ou, se $sen\,\alpha > 0$ e $tg\,\alpha < 0$, então $\alpha \in 2.^{\text{o}}Q$ e, por isso, $\cos\alpha < 0$.)
Logo, tendo em consideração a FFT ($sen^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$), vem: $\cos\alpha = -\sqrt{1 - sen^2\,\alpha}$.

(4) A função tangente não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
Logo, são de excluir os intervalos $]0, \pi[$, $\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$ e $]\pi, 2\pi[$.

(5) Se nesse espaço de tempo o ponteiro dos minutos rodou -3π radianos, então decorreu 1h e 30 min desde o momento em que a Inês reparou que eram 10 h e 15 min. Logo, nesse último instante, o relógio da Inês marcava 11 h e 45 min.