Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

27/10/2010 **Turma A - Provas 1 e 2** **11.º Ano**

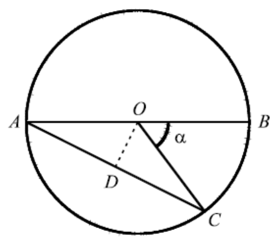
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**D**	**A**	**B**	**C**
Questão	*4*	*1*	*5*	*3*	*2*
Prova 2	**D**	**B**	**D**	**C**	**B**

2.ª Parte

1.



a)

O arco BC tem de amplitude a do ângulo ao centro correspondente, isto é $\overset{\frown}{BC} = B\hat{O}C = 70^o$.

Como um ângulo inscrito numa circunferência tem metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, temos $B\hat{A}C = \dfrac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \dfrac{70^o}{2} = 35^o$.

b)

Consideremos o triângulo [ABC]. Este triângulo é rectângulo, pois está inscrito numa semi-circunferência.

Ora, $sen\, B\hat{A}C = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$, donde $sen\, 35^o = \dfrac{\overline{BC}}{10} \Leftrightarrow \overline{BC} = 10 \times sen\, 35^o$.

Logo, $\overline{BC} = 10 \times sen\, 35^o \simeq 5,7$ cm.

c)

No triângulo rectângulo [ADO], tem-se:

$sen\, O\hat{A}D = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{AO}}$, donde $sen\, 35^o = \dfrac{\overline{OD}}{5} \Leftrightarrow \overline{OD} = 5 \times sen\, 35^o$ (note que $\overline{OD} = \dfrac{\overline{BC}}{2}$. Porquê?)

e $\cos O\hat{A}D = \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AO}}$, donde $\cos 35^o = \dfrac{\overline{AD}}{5} \Leftrightarrow \overline{AD} = 5 \times \cos 35^o$.

Logo, vem:

$$
\begin{aligned}
A_{[AOC]} &= \frac{\overline{AC} \times \overline{OD}}{2} \\
&= \frac{2 \times (5 \times \cos 35^o) \times (5 \times sen\, 35^o)}{2} \\
&= 25 \times \cos 35^o \times sen\, 35^o \\
&= 25 \times \cos^2 35^o \times \frac{sen\, 35^o}{\cos 35^o} \\
&= 25 \times \cos^2 35^o \times tg\, 35^o
\end{aligned}
$$

2.

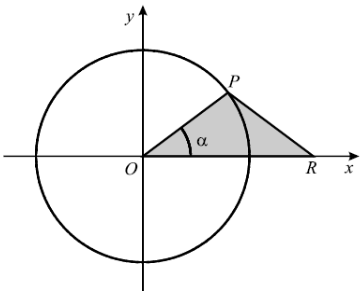
a)

$$
\begin{aligned}
\cos\frac{19\pi}{4}+sen\left(-\frac{4\pi}{3}\right)+tg\,\frac{37\pi}{6}-\cos\left(-\frac{13\pi}{6}\right) &= \cos\left(4\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\right)-sen\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+tg\left(6\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(-2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-\left(-sen\,\frac{\pi}{3}\right)+tg\,\frac{\pi}{6}-\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)\\
&= -\cos\frac{\pi}{4}+sen\,\frac{\pi}{3}+tg\,\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{6}\\
&= -\frac{\sqrt{2}}{2}+\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\cancel{\frac{\sqrt{3}}{2}}\\
&= \frac{2\sqrt{3}-3\sqrt{2}}{6}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
E(\alpha) &= \cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-2\,sen\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)+tg\,(16\pi-\alpha)-sen\,(7\pi-\alpha)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-2\,sen\left(4\pi-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+tg\,(-\alpha)-sen\,(\pi-\alpha)\\
&= \cancel{sen\,\alpha}+2\,sen\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg\,\alpha\cancel{-sen\,\alpha}\\
&= 2\cos\alpha-tg\,\alpha
\end{aligned}
$$

3.



a)

Seja P' a projecção do ponto P sobre o eixo *Ox*.

No triângulo rectângulo [OPP'], tem-se $\cos\alpha=\dfrac{\overline{OP'}}{\overline{OP}}$,

donde $\cos\alpha=\dfrac{\overline{OP'}}{2}\Leftrightarrow\overline{OP'}=2\cos\alpha$.

Assim, $P(\alpha)=\overline{OP}+\overline{PR}+2\times\overline{OP'}=2+2+4\cos\alpha=4(1+\cos\alpha)$, cqm.

b)

Ora,

$$
\begin{aligned}
P(\alpha)=4+2\sqrt{3} &\Leftrightarrow 4(1+\cos\alpha)=4+2\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \cancel{4}+4\cos\alpha=\cancel{4}+2\sqrt{3}\\
&\Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}
\end{aligned}
$$

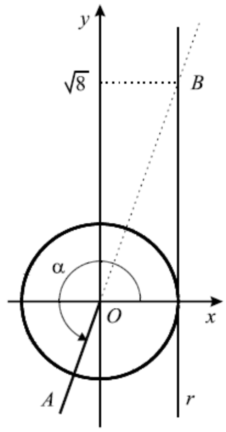
Como $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, então $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$.

c)

Tendo em consideração a FFT e que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, vem: $\cos\alpha=+\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{25-9}{25}}=\dfrac{4}{5}$.

Logo, para esse valor α_1 , o perímetro do triângulo é $P(\alpha_1)=4\left(1+\frac{4}{5}\right)=4\times\frac{9}{5}=\frac{36}{5}$.

4.



a) Ora,

$$\begin{aligned} 6\,sen\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-3\,sen\,(3\pi-\alpha) &= 6\,sen\left(\frac{\pi}{2}-(-\alpha)\right)-3\,sen\,(\pi-\alpha) \\ &= 6\cos(-\alpha)-3\,sen\,\alpha \qquad (1) \\ &= 6\cos\alpha-3\,sen\,\alpha \end{aligned}$$

Considerando que $1+tg^2\,\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ e $tg\,\alpha=\sqrt{8}$, vem

$1+(\sqrt{8})^2=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\Leftrightarrow \cos^2\alpha=\dfrac{1}{9}$.

Dado que $\alpha\in 3.^{o}Q$, então $\cos\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{9}}=-\dfrac{1}{3}$ e $sen\,\alpha=-\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=-\sqrt{\dfrac{8}{9}}=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

Logo, tendo (1) em consideração, vem:

$6\,sen\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)-3\,sen\,(3\pi-\alpha)=6\times\left(-\dfrac{1}{3}\right)-3\times\left(\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}\right)=-2+2\sqrt{2}=2(\sqrt{2}-1)$, c.q.m.

b)

$$\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=\frac{1-\dfrac{sen^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}{1+\dfrac{sen^2\,\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\dfrac{\cos^2\alpha-sen^2\,\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}}}{\dfrac{\cos^2\alpha+sen^2\,\alpha}{\cancel{\cos^2\alpha}}}=\frac{\cos^2\alpha-sen^2\,\alpha}{1}=(1-sen^2\alpha)-sen^2\alpha=1-2\,sen^2\alpha\ ,\ \forall\alpha\in\left]\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right[\ .$$

FIM

---

(1) Se $\theta\in\left]\dfrac{\pi}{2},\pi\right[$, então $sen\,\theta>0$, $\cos\theta<0$ e $tg\,\theta<0$.
Logo, $sen\,\theta\times\cos\theta<0$, $sen\,\theta-tg\,\theta>0$, $sen\,\theta\times tg\,\theta<0$ e $\cos\theta-sen\,\theta<0$.

(2) A altura do triangulo [ABC] em relação à base [AC], divide-o em dois triângulos rectângulos geometricamente iguais, com ângulos agudos de amplitudes α e $\dfrac{\beta}{2}$, sendo $\alpha+\dfrac{\beta}{2}=90^{o}\Leftrightarrow\dfrac{\beta}{2}=90^{o}-\alpha$.

Assim, vem $\cos\left(\dfrac{\beta}{2}\right)=\cos(90^{o}-\alpha)=sen\,\alpha$ (relação dos ângulos complementares).

(3) Tenha em consideração que $\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ e que 120º é a amplitude de um ângulo do 2.º quadrante para a qual o seno é $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

(4) Tendo em consideração que o triângulo [OPQ] é simétrico em relação ao eixo *Oy* e que $P\,(\cos 53^{o}, sen\,53^{o})$, vem:
$A_{[OPQ]}=\dfrac{\overline{PQ}\times\overline{PP'}}{2}=\dfrac{2\cos 53^{o}\times sen\,53^{o}}{2}=\cos 53^{o}\times sen\,53^{o}\simeq 0,5$, sendo P' a projecção ortogonal de P sobre o eixo *Ox*.

(5) Ora, $tg\ (4\pi+\beta)>0\Leftrightarrow tg\,\beta>0$ e $\cos\ (-\beta)<0\Leftrightarrow\cos\beta<0$.
Logo, se $tg\,\beta>0\wedge\cos\beta<0$, então $\beta\in 3.^{o}Q$.