

# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Prova Escrita de Matemática

07/06/2004

Turmas A e B - Prova 2

11.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

**Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Qual é o limite da sucessão definida por  $u_n = \frac{1-3n^2}{6n^2+5}$  ?

[A]  $-\infty$

[B]  $-\frac{1}{2}$

[C]  $\frac{1}{6}$

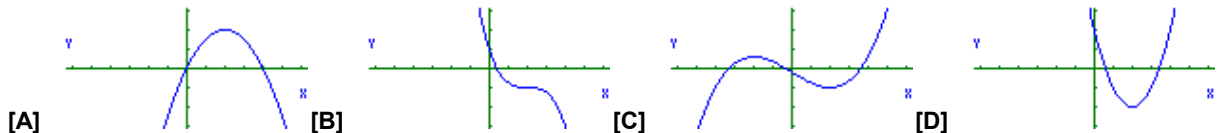
[D]  $+\infty$

2. Uma dada função  $h$ , polinomial de grau inferior a quatro, satisfaz as seguintes condições:

- a taxa média de variação no intervalo  $[0, 2]$  é negativa;
- admite inversa (isto é, existe  $h^{-1}$ );
- existe pelo menos um  $x_0 \in \mathbb{R}$ , tal que  $h'(x_0) = 0$  ( $h'$  designa a função derivada de  $h$ )

```
View Window
Xmin : 6.3
max : 6.3
scale : 1
Ymin : -3.1
max : 3.1
scale : 1
INIT TRIG STD STO RCL
```

Das funções abaixo representadas graficamente, a única que satisfaz as três condições é:



3. Num referencial o. n.  $Oxyz$ , considere:

- a esfera definida pela condição  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$
- o plano de equação  $z = 4$

Qual é a área da intersecção da esfera com o plano?

[A]  $9\pi$

[B]  $6\pi$

[C]  $3\pi$

[D]  $\pi$

4. Na figura está representada parte do gráfico de uma função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , bem como parte da recta tangente ao gráfico de  $h$ , no ponto  $(0, 3)$ .

Esta recta intersecta o eixo  $Ox$  no ponto de abcissa 3.

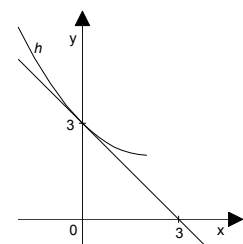
Qual das expressões seguintes pode definir  $h'$ , função derivada de  $h$  ?

[A]  $\frac{x}{3} - 2$

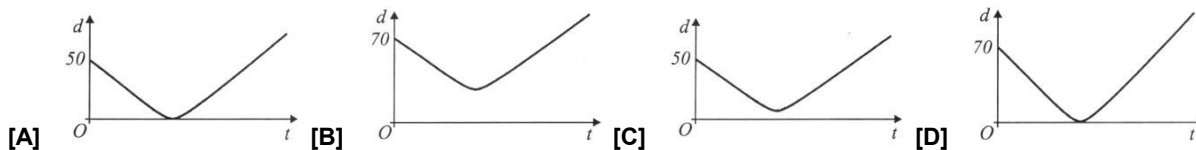
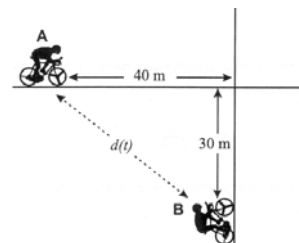
[B]  $1 - \frac{x}{2}$

[C]  $2 - \frac{x}{3}$

[D]  $\frac{x}{2} - 1$



5. Na figura estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente. No instante  $t = 0$ , os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento. Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante. Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de  $t$ , dá a distância  $d(t)$  entre os dois ciclistas, no instante  $t$ ?

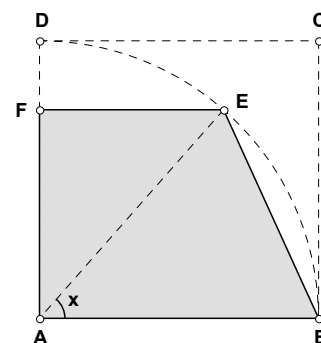


## 2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEF]. Tem-se que:

- [ABCD] é um quadrado de lado 2
- BD é um arco de circunferência de centro em A; o ponto E move-se ao longo deste arco; em consequência, o ponto F desloca-se sobre o segmento [AD], de tal forma que se tem sempre  $[EF] \perp [AD]$
- $x$  designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAE ( $x \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ )



- a) Mostre que a área do polígono [ABEF] é dada, em função de  $x$ , por:

$$A(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$$

NOTA: Tenha em consideração que  $\operatorname{sen}(2x) = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x$  e que  $\widehat{BAE} = \widehat{AEF}$  (Porquê?).

- b) Diga para que valor tende  $A(x)$  quando  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  e interprete geometricamente esse valor.
- c) Aprenderá mais tarde que, para encontrar o valor de  $x$  que torna a área máxima, terá de resolver a equação:

$$2 \cos x + 2 \cos(2x) = 0$$

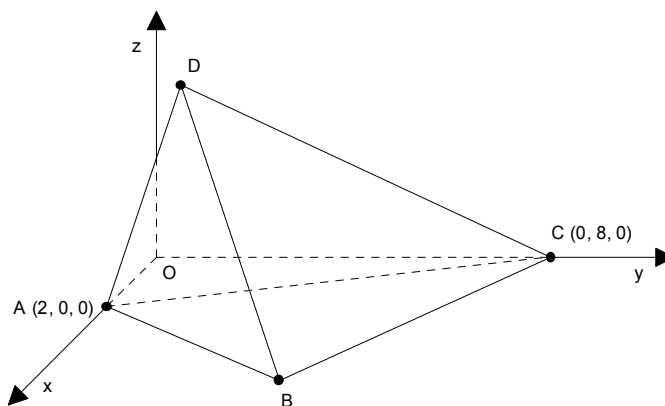
- c1) Resolva-a, determine aquele valor de  $x$  e encontre o valor máximo da área.
- c2) Recorrendo à sua calculadora, verifique os valores que determinou na alínea anterior. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou.

2. No referencial ortonormado  $(O, x, y, z)$ , considere a pirâmide [ABCD]. Tem-se que:

- $\vec{CB} = (5, -3, 0)$
- $\vec{CD} = (1, -7, 4)$
- $A(2, 0, 0)$  e  $C(0, 8, 0)$ .

- a) Determine a amplitude do ângulo CDA, com aproximação à décima de grau.

- b) Mostre que o vector  $\vec{n} = (3, 5, 8)$  é normal ao plano BCD e determine uma sua equação cartesiana.



3. Um objecto move-se ao longo de uma recta e a sua distância, em *centímetros*, a um ponto de referência fixo é dada em função do tempo  $t$ , em *segundos*, por

$$d(t) = 2t + \frac{8}{t+1}, \text{ com } t \geq 0.$$

Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva as três alíneas seguintes.

- a) Determine o período de tempo durante o qual o objecto distou do ponto de referência 15 cm ou menos?
- b) Prove que a taxa média de variação de  $d$  no intervalo  $[1, 3]$  é 1.  
Interprete este valor no contexto da situação descrita.
- c) Sabe-se que  $d'(t) = 2 - \frac{8}{(t+1)^2} = \frac{2(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$ . ( $d'$  designa a derivada de  $d$ )  
Verifique se a função  $d$  tem um mínimo absoluto e, em caso afirmativo, determine-o.

4. Considere as funções  $f$ ,  $g$  e  $h$ , de domínios  $D_f = ]-\infty, 9]$ ,  $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  e  $D_h = \mathbb{R}$ , assim definidas:

$$f(x) = -5 + \sqrt{9-x} \qquad g(x) = \frac{3x-2}{x+1} \qquad h(x) = x-2$$

- a) Determine os valores de  $x$  para os quais  $f(x) = h(x)$ .
- b) Calcule  $(f \circ h')(-1)$ , sendo  $h'$  a função derivada de  $h$ .
- c) Caracterize  $g^{-1}$ , função inversa de  $g$ .

5. Considere as sucessões, assim definidas:

$$u_n = \begin{cases} u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases} \qquad v_n = \frac{5}{2^n} \qquad \text{e} \qquad w_n = 2n^2 - 4$$

- a) Mostre que a sucessão  $(u_n)$  é monótona e determine uma expressão do seu termo geral.
- b) Prove que a sucessão  $(v_n)$  é uma progressão geométrica decrescente.  
Calcule a soma dos seus primeiros 20 termos, indicando o resultado com aproximação às milionésimas.
- c) Pelos teoremas sobre infinitamente grandes e sobre infinitésimos, mostre que  $v_n \rightarrow 0$  e que  $w_n \rightarrow +\infty$ .

**NOTA:** Para facilitar a resolução, pode referenciar os teoremas por  $T_1, T_2, \dots, T_8$ , conforme o seu manual.

**FIM**

## Formulário

Áreas	Volumes
Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$	Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$	Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Círculo: $\pi r^2$	Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Superfície esférica: $4\pi r^2$	Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** ..... 45 pontos

Cada resposta certa ..... +9 pontos

Cada resposta errada ..... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

**Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.**

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

**2.ª Parte** ..... 155 pontos

1. .... 38 pontos

a) ..... 10

b) ..... 8

c1) ..... 12

c2) ..... 8

2. .... 27 pontos

a) ..... 13

b) ..... 14

3. .... 31 pontos

a) ..... 15

b) ..... 8

c) ..... 8

4. .... 27 pontos

a) ..... 10

b) ..... 7

c) ..... 10

5. .... 32 pontos

a) ..... 10

b) ..... 12

c) ..... 10

**Total 200 pontos**