Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

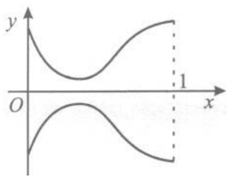
10/05/2004 **Turmas A e B - Prova 1** **11.º Ano**

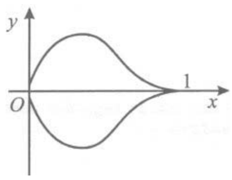
Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

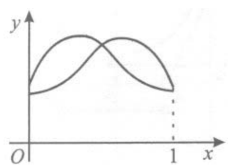
1.ª Parte

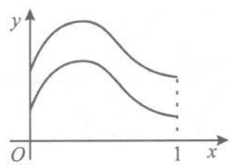
Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. De duas funções *f* e *g*, de domínio [0, 1], sabe-se que $f'(x) = g'(x),\ \forall x \in [0, 1]$.
Em qual das figuras seguintes podem estar representados os gráficos de *f* e de *g*?

[A] 

[B] 

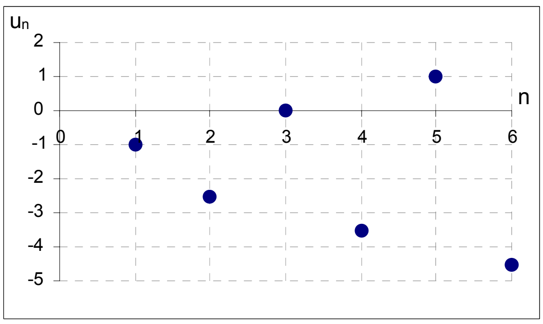
[C] 

[D] 

2. Um reservatório cheio de água começa a ser esvaziado às 12 horas de um certo dia. Admita que a altura da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por $h(t) = 2 - \sqrt[3]{t}$.
O reservatório fica vazio às

[A] 16 horas **[B]** 18 horas **[C]** 20 horas **[D]** 22 horas

3. Na figura estão representados os seis primeiros termos de uma sucessão (u_n).



Qual das seguintes afirmações pode ser verdadeira?

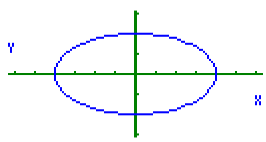
[A] (u_n) é limitada

[B] (u_n) tem termo geral $u_n = \dfrac{n-3}{2}$

[C] (u_n) é monótona

[D] (u_n) pode ser definida por $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n - 1{,}5 \end{cases}$

4. No referencial ortonormado da figura está representada uma elipse de vértices nos pontos de coordenadas: $(4, 0)$, $(0, 2)$, $(-4, 0)$ e $(0, -2)$.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

[A] $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ é uma equação da elipse

[B] Os focos são: $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ e $F_2(2\sqrt{3}, 0)$

[C] $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ é uma equação da elipse

[D] Os focos são: $F_1(-2\sqrt{5}, 0)$ e $F_2(2\sqrt{5}, 0)$

5. Considere, num referencial o. n. xOy, um ponto P, distinto da origem e pertencente à recta de equação $y = 2x$.
Seja Q o simétrico de P, em relação à origem do referencial.
Considere o rectângulo de lados paralelos aos eixos do referencial e tal que uma das suas diagonais é [PQ].
Qual das expressões seguintes dá a área desse rectângulo, em função da abcissa x do ponto P?

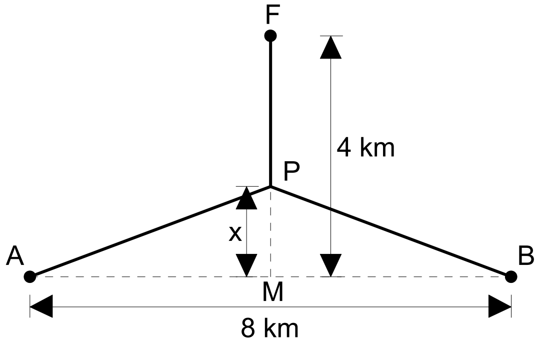
[A] $12x^2$ **[B]** $8x^2$ **[C]** $6x^2$ **[D]** $2x^2$

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Duas povoações, A e B, distanciadas 8 km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em F.

Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte F até um ponto P e dois que partem de P, um para A e outro para B. O ponto P está a igual distância de A e de B.



Tem-se ainda que:

- o ponto M, ponto médio de [AB], dista 4 km de F
- x é a distância entre P e M (em quilómetros)

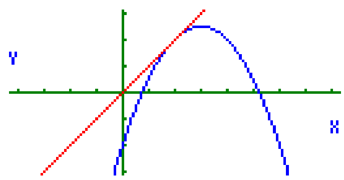
a) Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por

$$c(x) = 4 - x + 2\sqrt{16 + x^2} \quad , \text{ com } x \in [0, 4]$$

b) Determine o(s) valor(es) de x para o(s) qual(is) é de 11 quilómetros o comprimento total da canalização.

c) Recorrendo à sua calculadora, determine o valor de x (aproximação ao metro) para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.
Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

2. Sejam f e g duas funções reais, tais que:



- $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2 - x}$, sendo $D_{f'} = D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$
- g é a função quadrática representada graficamente na figura junta
- a recta r passa na origem do referencial e é tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(2, 2)$
- No ponto $x = 3$, a recta tangente ao gráfico de g é horizontal

NOTA: Poderá ser útil ter presente a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto.

a) Calcule $f'(3) \times g'(3) - g'(2)$ e $(f' \circ g)(2)$.

b) Justifique que g não admite função inversa.

Caracterize a inversa de h, restrição de g a $]-\infty, 3]$, sabendo que

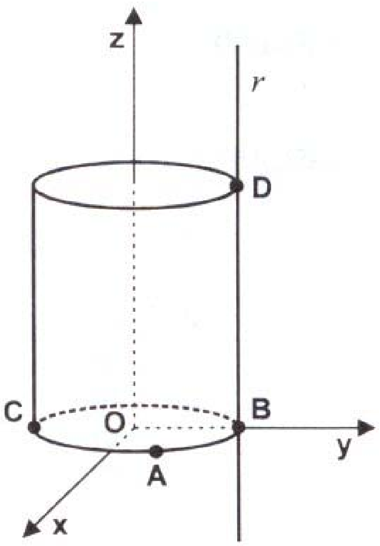
$$h: \quad]-\infty, 3] \to]-\infty, \tfrac{5}{2}]$$
$$x \to -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{5}{2}$$

c) Estude o sinal da função f' (derivada de f) e conclua sobre os intervalos de monotonia de f.

d) Mostre que existem duas rectas tangentes ao gráfico de f que são perpendiculares à recta r.

3. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*, um cilindro de revolução como o representado na figura junta:

- A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano *xOy*;
- [BC] é um diâmetro da base inferior, contido no eixo *Oy*. O ponto C tem coordenadas $(0, -5, 0)$;
- O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas $(4, 3, 0)$;
- A recta *r* passa no ponto B e é paralela ao eixo *Oz*;
- O ponto D pertence à recta *r* e à circunferência que limita a base superior do cilindro.



a) Considere o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$, tais que $\overrightarrow{OP} . \overrightarrow{BC} = 0$. Identifique esse lugar geométrico e caracterize-o através de uma equação cartesiana.

b) Justifique que $\overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano ABD. Determine uma equação cartesiana deste plano.

c) Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BOD:

c1) mostre que o volume da pirâmide [ABCD] é dado por $V(\alpha) = \dfrac{100\, tg\, \alpha}{3}$, com $\alpha \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$;

c2) determine o valor de α para o qual o volume da pirâmide [ABCD] é $\dfrac{100}{\sqrt{3}}$.

4. Considere a sucessão (u_n), assim definida: $u_n = \dfrac{5-3n}{2n}$.

a) Prove que a sucessão é monótona.

b) A sucessão é limitada? Justifique.

NOTA: Poderá ser útil considerar que $u_n = \dfrac{5-3n}{2n} = \dfrac{5}{2n} - \dfrac{3n}{2n} = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2n}$.

FIM

Formulário

Áreas	Volumes
Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: *Área da base* $\times$ *Altura*
Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$	Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*
Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*	Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*
Círculo: πr^2	Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*
Superfície esférica: $4 \pi r^2$	Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
C	0	0	0	0	0	0	0
E	1	9	6	3	0	0	
R	2	18	15	12	9		
T	3	27	24	21			
A	4	36	33				
S	5	45					

2.ª Parte .... 155 pontos

1. .... 35 pontos
   - a) 10
   - b) 15
   - c) 10

2. .... 47 pontos
   - a) 8
   - b) 14
   - c) 12
   - d) 13

3. .... 48 pontos
   - a) 10
   - b) 14
   - c1) 12
   - c2) 12

4. .... 25 pontos
   - a) 13
   - b) 12

Total **200 pontos**