

Nome: _____

N.º: _____ Turma: _____

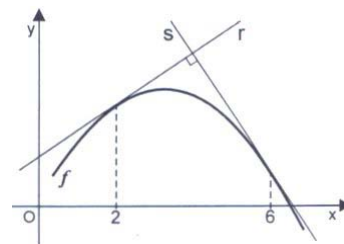
1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Na figura estão representados:

- o gráfico de uma função f
- a recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 2 e de equação $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{4}$
- a recta s , tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 6



Sabendo que as rectas r e s são perpendiculares, indique o valor de $f'(6)$, derivada da função f no ponto 6.

[A] $-\frac{3}{2}$

[B] $-\frac{4}{5}$

[C] $-\frac{2}{5}$

[D] $\frac{5}{3}$

2. Seja g uma função contínua, de domínio \mathbb{R} . Sabe-se que:

- g tem um mínimo **absoluto** igual a 3, para $x = 2$
- g tem um máximo **absoluto** igual a 7, para $x = 5$

Qual das afirmações seguintes é **necessariamente** verdadeira?

[A] g é crescente em $[2, 5]$

[B] O contradomínio de g é $[3, 7]$

[C] g tem derivada nula em $x = 2$ e em $x = 5$

[D] g tem pelo menos um zero

3. Considere, relativamente a um referencial o. n. $Oxyz$:

- um plano α , definido pela equação $3x - z = 2$
- uma recta r , definida pela condição $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$
- um ponto P , de coordenadas $(0, 2, 3)$.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

[A] P pertence a r

[B] r é paralela a α

[C] P pertence a α

[D] r é perpendicular a α

4. Um projectil é lançado verticalmente de baixo para cima.

Admita que a sua altura h (em metros), t segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão $h(t) = 100t - 5t^2$. Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projectil, dois segundos após o lançamento?

[A] 80

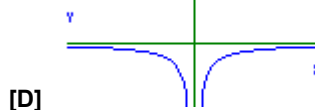
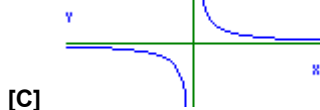
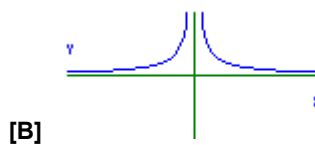
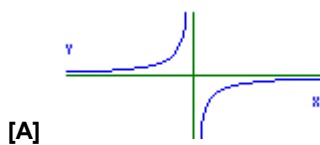
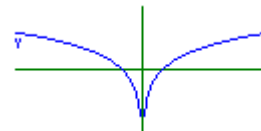
[B] 130

[C] 170

[D] 230

5. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Qual das figuras seguintes poderá ser parte da representação gráfica da função g' , derivada de g ?



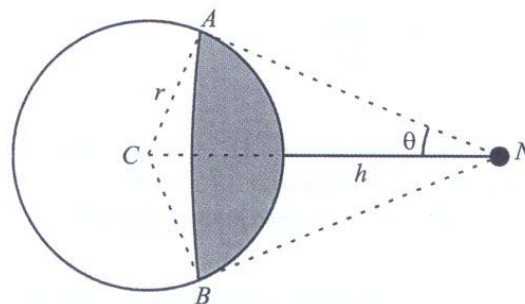
2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Na figura está representada a Terra e uma nave espacial N . Considere que a Terra é uma esfera de centro C e raio r .

A área da superfície da terra visível da nave, representada a sombreado na figura, é dada, em função do ângulo θ , por

$$f(\theta) = 2\pi r^2(1 - \operatorname{sen} \theta) \quad (\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[)$$



a) Determine o valor de θ para o qual é visível, da nave, a quarta parte da superfície terrestre.

b) Designado por h a distância da nave à Terra (ver figura), mostre que a área da terra visível da nave é dada, em função de h , por $g(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}$.

Sugestão: Tenha em conta que o ângulo $\angle CAN$ é recto.

c) Como facilmente reconhecerá, $g(h) = \frac{2\pi r^2 h}{r+h} = \frac{2\pi r^2}{\frac{r}{h} + 1}$.

Diga para que valor tende $g(h)$ quando $h \rightarrow +\infty$ e interprete esse resultado no contexto da situação descrita.

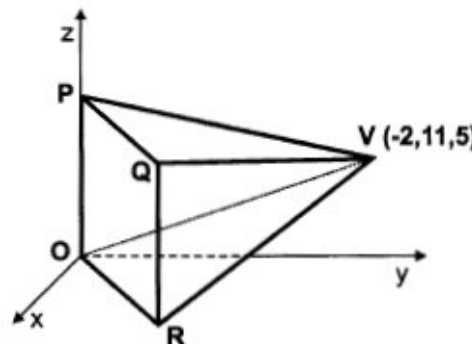
2. Na figura ao lado está representada, em referencial o. n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular.

- O vértice O é a origem do referencial
- O vértice P pertence ao eixo Oz
- O vértice R pertence ao plano xOy
- O vértice V tem coordenadas $(-2, 11, 5)$
- Uma equação vectorial da recta que contém a altura da pirâmide é $(x, y, z) = (7, -1, 5) + k(6, -8, 0)$, $k \in \mathbb{R}$

a) Mostre que a base da pirâmide está contida no plano de equação $3x - 4y = 0$.

b) Justifique que o centro da base da pirâmide é o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$.

c) Determine o volume da pirâmide.



3. Uma nova empresa de refrigerantes pretende lançar no mercado embalagens de sumo de fruta, com capacidade de **dois litros**. Por questões de *marketing*, as embalagens deverão ter a forma de um **prisma quadrangular regular**.



- a) Mostre que a área total da embalagem, em dm^2 , é dada por

$$A(x) = 2x^2 + \frac{8}{x} \quad (x \text{ é o comprimento da aresta da base, em } dm)$$

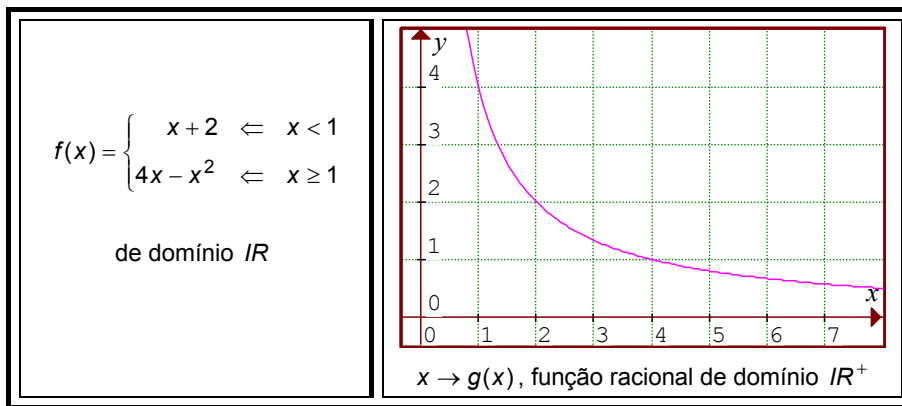
Nota: Recorde que $1 \text{ litro} = 1 \text{ dm}^3$.

- b) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, mostre que existe um valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima e determine-o.

- c) Há exactamente dois valores de x para os quais a área total da embalagem é igual a 12 dm^2 .

Recorrendo à sua calculadora, resolva graficamente este problema. Apresente as soluções com aproximação às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

4. Considere as duas funções, reais de variável real, assim definidas:



- a) Calcule a taxa média de variação da função g no intervalo $[1, 4]$.
- b) Usando a definição, determine $f'(1^+)$, derivada lateral direita da função f no ponto de abcissa 1. Sabendo que $f'(1^-) = 1$, conclua sobre a existência de derivada de f no ponto de abcissa 1.
- c) Caracterize a função derivada de f .
- d) Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f , no ponto de abcissa 4.
- e) Sabendo que a função g pode ser definida por $g(x) = \frac{4}{x}$, caracterize a restrição de $f \circ g$ ao intervalo $]0, 4[$.

FIM

Formulário

Áreas	Volumes
Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$	Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$	Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Círculo: πr^2	Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Superfície esférica: $4 \pi r^2$	Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

2.ª Parte 155 pontos

1. 34 pontos

a) 12

b) 12

c) 10

2. 34 pontos

a) 12

b) 12

c) 10

3. 38 pontos

a) 12

b) 16

c) 10

4. 49 pontos

a) 8

b) 12

c) 7

d) 10

e) 12

Total 200 pontos