

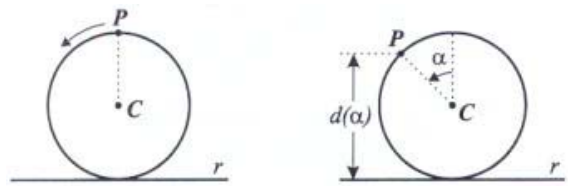
Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Considere uma circunferência de centro C e raio 1, tangente a uma recta r. Um ponto P começa a deslocar-se sobre a circunferência, no sentido indicado na figura. Inicialmente, o ponto P encontra-se a 2 unidades da recta r.



Seja $d(\alpha)$ a distância de P a r, após uma rotação de amplitude α . Qual das igualdades seguintes é verdadeira?

- [A] $d(\alpha) = 1 + \cos \alpha$ [B] $d(\alpha) = 2 + \sin \alpha$ [C] $d(\alpha) = 1 - \cos \alpha$ [D] $d(\alpha) = 2 - \sin \alpha$

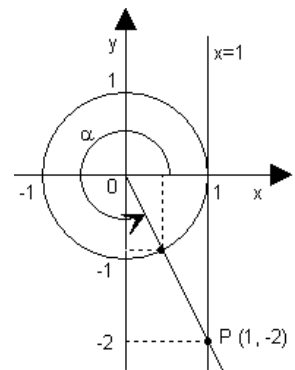
2. O ângulo generalizado do 2.º quadrante cujo seno é igual a $\cos \frac{\pi}{3}$ pode ser definido por:

- [A] $120^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ [B] $135^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ [C] $145^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ [D] $150^\circ + k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

3. Um radiano é:

- [A] a amplitude de um arco de circunferência cujo comprimento é igual ao diâmetro dessa circunferência.
 [B] a amplitude do ângulo ao centro a que corresponde um arco de comprimento igual ao diâmetro da circunferência a que pertence
 [C] a amplitude do ângulo ao centro a que corresponde um arco de comprimento igual ao raio da circunferência a que pertence.
 [D] o comprimento de um arco de circunferência a que corresponde um ângulo ao centro de cerca de 57° .

4. No referencial ortonormado da figura, considere o círculo trigonométrico, a recta de equação $x = 1$ e o ângulo α . O ponto P é a intersecção do lado extremidade de α com a recta vertical considerada. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?



- [A] $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ [B] $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$
 [C] $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ [D] $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$

5. De um ângulo β , sabe-se que $\operatorname{tg}(4\pi + \beta) > 0$ e que $\cos(-\beta) < 0$.

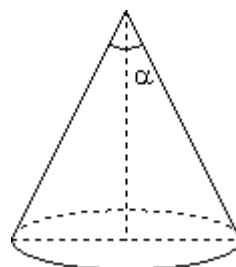
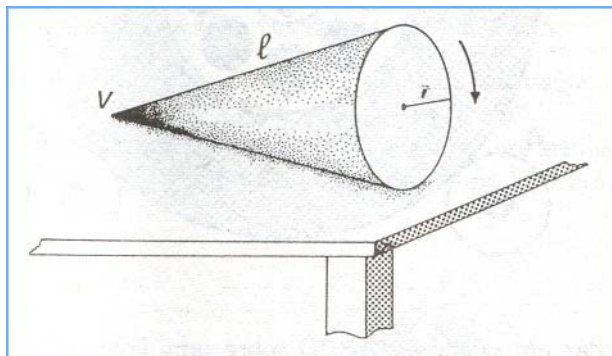
A que quadrante pertence β ?

- [A] 1.º quadrante [B] 2.º quadrante [C] 3.º quadrante [D] 4.º quadrante

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Um cone, cuja base tem raio r e cuja geratriz tem comprimento l , roda sobre uma superfície horizontal e plana.

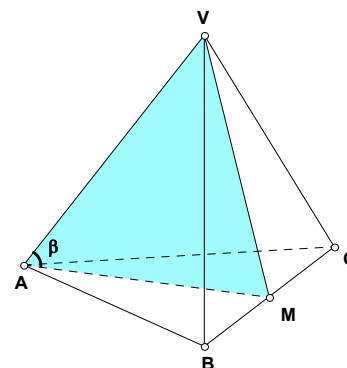


α é ângulo do cone

- a) Descreva o que acontece com o cone.
 b) Sabendo que o cone retorna ao ponto de partida, depois de ter efectuado duas revoluções completas em torno do seu eixo de simetria, qual é a amplitude do ângulo do cone?

2. Pretende-se saber o ângulo que a aresta lateral de um tetraedro regular faz com o plano da base. Para isso, considerou-se a secção produzida nesse tetraedro pelo plano AMV, onde M é o ponto médio da aresta [BC].

Determine a amplitude do ângulo considerado (com aproximação à décima de grau), sabendo que a aresta do tetraedro tem 2 centímetros de comprimento.



3. Mostre que:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$

b) $1 - \cos^2 x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} = 1$, para os valores em que a expressão tem significado.

4. Simplifique a expressão: $2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(7\pi + x) - \operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{4}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$.

5. Sabendo que $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\frac{3}{7}$ e que $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, determine o valor exacto de $\operatorname{tg}(\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

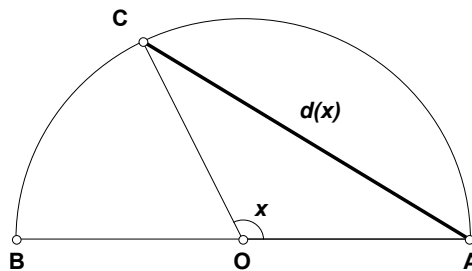
6. Determine, recorrendo a intervalos de números reais, os valores de k para os quais:

$$\operatorname{tg} x = k^2 - 3 \quad \wedge \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$$

7. Um ponto C desloca-se sobre uma semicircunferência de diâmetro [AB] e centro O.

Considere que o comprimento do segmento [AC], em função da amplitude x do ângulo AOC, é dado por

$$d(x) = 2 \cdot \text{sen} \frac{x}{2}, \quad x \in [0, \pi]$$



- a) Indique o valor de x para o qual $d(x) = \overline{AB}$.
Justifique que a semicircunferência tem raio 1.
- b) Justifique que, quando $x \in]0, \pi[$, o triângulo [ABC] é rectângulo em C.
Mostre que $\overline{BC} = 2 \cdot \cos \frac{x}{2}$.

Nota: Recorde que a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os lados desse ângulo.

- c) Verifique que a área do triângulo [ABC] é dada por $A(x) = \text{sen } x$.
Justificando, indique o valor de x para o qual é máxima a área do triângulo.

Nota: Tenha em consideração a relação seguinte: $\text{sen}(2\alpha) = 2 \cdot \text{sen } \alpha \cdot \cos \alpha$.

- d) Mostre que o perímetro do triângulo [ABC] é dado por $P(x) = 2 \cdot (1 + \text{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})$.

Utilizando as potencialidades da calculadora gráfica, determine o valor de x para o qual é máximo o perímetro do triângulo, assim como o valor desse perímetro. (aproximação às centésimas) (Note que $x \in]0, \pi[$)
Ilustre a resolução com um ou mais gráficos e descreva os procedimentos que efectuou.

Considere agora que $x \in]0^\circ, 180^\circ[$. Repita a questão colocada no parágrafo anterior e, se for o caso, indique a sua suposição.

FIM

Formulário

Áreas de figuras planas	Volumes
Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$	Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$	Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Círculo: πr^2	Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
	Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
	5	45					

2.ª Parte 155 pontos

1. 18 pontos

a) 6

b) 12

2. 18 pontos

3. 25 pontos

a) 12

b) 13

4. 16 pontos

5. 16 pontos

6. 12 pontos

7. 50 pontos

a) 10

b) 12

c) 10

d) 18

Total 200 pontos