

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

07/06/2004

Turmas A e B - Prova 1

11.º Ano

Nome: _____	N.º: _____ Turma: _____
-------------	-------------------------

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	B	D	A	C	C
Questão	5	3	4	1	2
Prova 2	C	A	D	B	B

2.ª Parte

1.

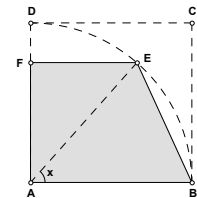
a)

Dado que $\widehat{BAE} = \widehat{AEF} = x$, considerando o triângulo rectângulo [AEF], temos:

$$\operatorname{sen} x = \frac{\overline{AF}}{\overline{AE}} \text{ e } \operatorname{cos} x = \frac{\overline{EF}}{\overline{AE}}.$$

Como $\overline{AE} = \overline{AB} = 2$, vem $\overline{AF} = 2 \operatorname{sen} x$ e $\overline{EF} = 2 \operatorname{cos} x$.

$$\text{Assim, } A(x) = \frac{\overline{AB} + \overline{EF}}{2} \times \overline{AF} = \frac{2 + 2 \operatorname{cos} x}{2} \times 2 \operatorname{sen} x = (1 + \operatorname{cos} x) \times 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x), \text{ c.q.m..}$$



b)

Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $2 \operatorname{sen} x \rightarrow 2$ e $\operatorname{sen}(2x) \rightarrow 0$. Logo, quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$, $A(x) \rightarrow 2 + 0 = 2$.

Interpretação:

Quando $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$, o ponto E aproxima-se do ponto D, o mesmo acontecendo com o ponto F. Assim, o quadrilátero [ABEF] tende a coincidir com o triângulo rectângulo [ABD], pelo que a sua área tende para a área do triângulo ($A_{[ABD]} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$).

c1)

Resolvendo a equação em IR, temos:

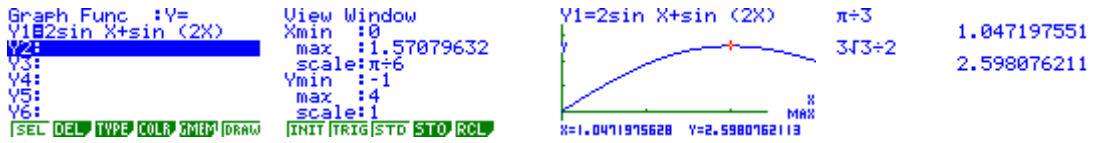
$$\begin{aligned} 2 \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{cos}(2x) &= 0 &\Leftrightarrow &\operatorname{cos}(2x) = -\operatorname{cos} x \\ &&\Leftrightarrow &\operatorname{cos}(2x) = \operatorname{cos}(x + \pi) \\ &&\Leftrightarrow &2x = x + \pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -x - \pi + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ &&\Leftrightarrow &x = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Como $x \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, o valor procurado é $\frac{\pi}{3}$ (o único zero de A').

$$\text{Logo, a área máxima é } A\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} + \operatorname{sen}\left(2 \times \frac{\pi}{3}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

c2)

Numa janela de visualização adequada ao contexto da situação, depois de definida a função $y_1 = 2 \sin x + \sin(2x)$ podemos determinar as coordenadas do ponto do gráfico de ordenada máxima:



Os cálculos realizados na calculadora (ver imagem), levam a admitir (com alguma convicção) que se confirmam os valores apresentados na alínea anterior.

2.

a)

Ora, $D = C + \vec{CD} = (0, 8, 0) + (1, -7, 4) = (1, 1, 4)$ e, portanto, $\vec{DA} = (2, 0, 0) - (1, 1, 4) = (1, -1, -4)$.

$$\text{Logo, } \cos(\vec{DA} \wedge \vec{DC}) = \frac{(1, -1, -4) \cdot (-1, 7, -4)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-4)^2} \times \sqrt{(-1)^2 + 7^2 + (-4)^2}} = \frac{-1 - 7 + 16}{3\sqrt{2} \times \sqrt{66}} = \frac{8}{3\sqrt{132}} = \frac{8}{6\sqrt{33}} = \frac{4\sqrt{33}}{99}.$$

$$\text{Assim, } \hat{CDA} = \cos^{-1} \frac{4\sqrt{33}}{99} \approx 76,6^\circ.$$

b)

Como $\vec{n} \cdot \vec{CD} = (3, 5, 8) \cdot (1, -7, 4) = 3 - 35 + 32 = 0$ e

$\vec{n} \cdot \vec{CB} = (3, 5, 8) \cdot (5, -3, 0) = 15 - 15 + 0 = 0$, então o vector \vec{n} é

perpendicular ao vector \vec{CD} , quer ao vector \vec{CB} . Assim, como \vec{n} é perpendicular a dois vectores não colineares do plano BCD, é normal a esse plano.

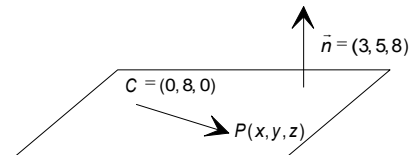
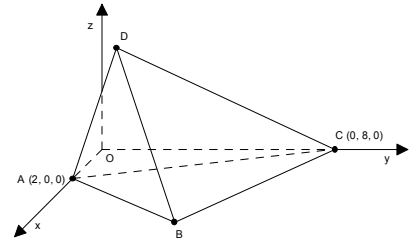
Sendo \vec{n} normal ao plano BCD, a equação pedida é da forma $3x + 5y + 8z + d = 0$. Como C é um ponto desse plano, vem $3 \times 0 + 5 \times 8 + 8 \times 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -40$, pelo que $3x + 5y + 8z - 40 = 0$ é uma equação cartesiana do plano BCD.

Alternativa:

$$\vec{CP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (x - 0, y - 8, z - 0) \cdot (3, 5, 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5y - 40 + 8z = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x + 5y + 8z - 40 = 0$$



3.

a)

Ora,

$$\begin{aligned} 2t + \frac{8}{t+1} \leq 15 &\Leftrightarrow 2t + \frac{8}{t+1} - 15 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2t^2 + 2t + 8 - 15t - 15}{t+1} \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2t^2 - 13t - 7}{t+1} \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2t^2 - 13t - 7 = 0 &\Leftrightarrow t = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 56}}{4} \\ &\Leftrightarrow t = \frac{13 \pm 15}{4} \\ &\Leftrightarrow t = 7 \vee t = -0,5 \end{aligned}$$

Como a função apenas está definida em \mathbb{R}_0^+ , vem:

t	0		7	$+\infty$
$2t^2 - 13t - 7$	-	-	0	+
$t + 1$	+	+	+	+
$\frac{2t^2 - 13t - 7}{t + 1}$	-	-	0	+

Portanto, durante os primeiros 7 segundos, o objecto distou do ponto de referência 15 cm ou menos.

b)

$$\text{Ora, } tmv_{[1,3]} = \frac{d(3) - d(1)}{3 - 1} = \frac{(6 + \frac{8}{4}) - (2 + \frac{8}{2})}{2} = 1, \text{ c.q.m..}$$

Interpretação:

A distância do objecto ao ponto de referência aumentou, em média, 1 centímetro por segundo, entre os instantes $t = 1$ e $t = 3$ (entre o primeiro e o terceiro segundos de observação).

c)

Tendo em consideração as propriedades da função quadrática e reparando que $(t + 1)^2 > 0, \forall t \in \mathbb{R}_0^+$, temos:

t	0		1	$+\infty$
$d'(t) = \frac{2(t-1)(t+3)}{(t+1)^2}$	-	-	0	+
$d(t)$	8	\searrow	6	\nearrow
	Máx		Mín	

Confirma-se que a função d tem um mínimo absoluto, que é igual a $d(1) = 2 \times 1 + \frac{8}{1+1} = 6$.

4.

a)

Ora,

$$\begin{aligned} f(x) = h(x) &\Leftrightarrow -5 + \sqrt{9-x} = x - 2 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{9-x} = x + 3 \\ &\Rightarrow 9 - x = x^2 + 6x + 9 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 7x = 0 \\ &\Leftrightarrow x \cdot (x + 7) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \vee x = -7 \end{aligned}$$

Verificação:

Para $x = 0$, vem $-5 + 3 = 0 - 2$, que é uma proposição verdadeira.

Para $x = -7$, vem $-5 + 4 = -7 - 2$, que é uma proposição falsa.

Portanto, a equação dada apenas tem uma solução: $x = 0$.

b)

Dado que $h'(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$, vem $(f \circ h')(-1) = f(h'(-1)) = f(1) = -5 + \sqrt{9-1} = -5 + 2\sqrt{2}$.

c)

Seja $y = \frac{3x-2}{x+1}$, então $y(x+1) = 3x-2 \Leftrightarrow x \cdot (y-3) = -y-2$. Logo, $x = \frac{y+2}{3-y}$.

Assim,

$$\begin{aligned} g^{-1}: \mathbb{R} \setminus \{3\} &\rightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ x &\rightarrow \frac{x+2}{3-x} \end{aligned}$$

5.

a)

Dado que $u_{n+1} = -2 + u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, então $u_{n+1} - u_n = -2, \forall n \in \mathbb{N}$ e, portanto, (u_n) é monótona decrescente.

Como $u_{n+1} - u_n = \underline{-2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é uma progressão aritmética de razão -2 .

constante

Assim, $u_n = 6 + (n-1) \times (-2) = 8 - 2n$ e, portanto, $u_n = 8 - 2n$ é uma expressão do seu termo geral.

b)

Como $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{5}{2^{n+1}}}{\frac{5}{2^n}} = \frac{5 \times 2^n}{5 \times 2^{n+1}} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é uma progressão geométrica.

Como o primeiro termo é $v_1 = \frac{5}{2} > 0$ e a razão é $\frac{1}{2}$ ($r \in]0, 1[$), então a progressão é decrescente.

(Se preferir:

Dado que $v_{n+1} - v_n = \frac{5}{2^{n+1}} - \frac{5}{2^n} = \frac{5-5 \times 2}{2^{n+1}} = -\frac{5}{2^{n+1}} < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (v_n) é monótona decrescente e, portanto, é uma progressão geométrica decrescente.)

$S_{1-20} = \frac{5}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^{20}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \times (1 - (\frac{1}{2})^{20}) = 5 \times \frac{2^{20} - 1}{2^{20}} \approx 4,999995$ é o valor pedido.

c)

Referenciando os teoremas por T_1, T_2, \dots, T_8 , conforme o manual, temos:

Dado que $a_n = 2^n \rightarrow +\infty$ (s. r.), então $b_n = \frac{1}{5} \times a_n = \frac{2^n}{5} \rightarrow +\infty$, por T3. Logo, $v_n = \frac{1}{b_n} = \frac{5}{2^n} \rightarrow 0$, por T6.

Dado que $c_n = n^2 \rightarrow +\infty$ (s. r.), então $d_n = 2 \times c_n = 2n^2 \rightarrow +\infty$, por T3. Logo, $w_n = 2n^2 - 4 \rightarrow +\infty$, por T2.

FIM

-
- (1) Repare que, no instante $t = 0$, a distância entre os ciclistas é de $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ quilómetros.
A distância entre os ciclistas nunca é nula pois, deslocando-se em direcções perpendiculares, isso apenas poderia acontecer se chegassem ao cruzamento ao mesmo tempo. Situação que não ocorre, visto que se deslocam à mesma velocidade constante e, no momento inicial, encontram-se a distâncias diferentes do cruzamento.
- (2) A intersecção considerada é o círculo definido por $x^2 + y^2 \leq 9 \wedge z = 4$. Isto é, um círculo de raio 3 unidades...
Em alternativa, pode fazer a representação num referencial e obter o raio do círculo por aplicação do teorema de Pitágoras.
- (3) A recta tangente ao gráfico de h , no ponto $(0, 3)$ tem declive $m = \frac{0-3}{3-0} = -1$.
Logo, tendo presente a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, terá de ser $h'(0) = -1$.
- (4) Repare que $\lim u_n = \lim \frac{1-3n^2}{6n^2+5} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}-3}{6+\frac{5}{n^2}} = \frac{\lim(\frac{1}{n^2}-3)}{\lim(6+\frac{5}{n^2})} = \frac{0-3}{6+0} = -\frac{1}{2}$.
- (5) Não deve haver dúvidas. Caso contrário, peça esclarecimento.
(Note que apenas uma das funções é injectiva)