

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

10/05/2004

Turmas A e B - Provas 1 e 2

11.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	D	C	A	B	B
Questão	2	4	1	3	5
Prova 2	B	B	C	D	C

2.ª Parte

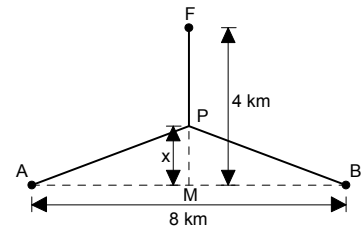
1.

a)

Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo [AMP], temos

$AP = \sqrt{4^2 + x^2}$. Dado que é $AP = PB$ e $FP = 4 - x$, vem

$c(x) = 4 - x + \sqrt{4^2 + x^2} + \sqrt{4^2 + x^2} = 4 - x + 2\sqrt{16 + x^2}$, com $x \in [0, 4]$.



b) Ora,

$$\begin{aligned}
 4 - x + 2\sqrt{16 + x^2} = 11 &\Leftrightarrow 2\sqrt{16 + x^2} = 7 + x \\
 &\Rightarrow 4(16 + x^2) = 49 + 14x + x^2 \\
 &\Leftrightarrow 3x^2 - 14x + 15 = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{14 \pm \sqrt{196 - 180}}{6} \\
 &\Leftrightarrow x = 3 \quad \vee \quad x = \frac{5}{3}
 \end{aligned}$$

Verificação:

$4 - 3 + 2\sqrt{16 + 3^2} = 11 \Leftrightarrow 1 + 10 \Leftrightarrow 11$ (P.V.), logo $x = 3$ é uma solução da condição;

$4 - \frac{5}{3} + 2\sqrt{16 + \frac{25}{9}} = 11 \Leftrightarrow \frac{7}{3} + 2\sqrt{\frac{169}{9}} = 11 \Leftrightarrow \frac{7}{3} + 2 \times \frac{13}{3} = 11 \Leftrightarrow 11 = 11$ (P.V.), logo $x = \frac{5}{3}$ é também solução.

O comprimento total da canalização é 11 quilómetros, para $x = 3$ ou $x = \frac{5}{3}$.

c)

Definida a função $y_1 = 4 - x + 2\sqrt{16 + x^2}$ e tendo em conta o domínio considerado, ajustou-se a janela de visualização por forma a obter uma representação adequada e, de seguida, utilizando a função interna G-Solv, procurou-se as coordenadas do ponto do gráfico com menor ordenada:



O comprimento da canalização é mínimo para $x = 2,309$ (em quilómetros), com aproximação ao metro.

2.

a)

Ora, $f'(3) \times g'(3) - g'(2) = -\frac{1}{3^2 - 3} \times 0 - 1 = -1$ e $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(2) = -\frac{1}{2^2 - 2} = -\frac{1}{2}$.

b)

A função g não admite inversa, pois é uma função não injectiva, visto que, por observação do seu gráfico, podemos constatar que há objectos diferentes com igual imagem.

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{5}{2} &\Leftrightarrow 2y = -(x-3)^2 + 5 \\ &\Leftrightarrow (x-3)^2 = 5-2y \\ &\Leftrightarrow x-3 = -\sqrt{5-2y} \quad \vee \quad x-3 = \sqrt{5-2y} \\ &\Leftrightarrow x = 3 - \sqrt{5-2y} \quad \vee \quad x = 3 + \sqrt{5-2y} \end{aligned}$$

Como $D_{h^{-1}} = D'_h =]-\infty, \frac{5}{2}]$ e $D'_{h^{-1}} = D_h =]-\infty, 3]$, podemos concluir que $h^{-1}(x) = 3 - \sqrt{5-2y}$ (pois as imagens de h^{-1} são inferiores ou iguais a 3). Logo, $h^{-1}:]-\infty, \frac{5}{2}] \rightarrow]-\infty, 3]$
 $x \rightarrow 3 - \sqrt{5-2x}$

c)

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
$x^2 - x$	+	0	-	0	+
$\frac{1}{x^2-x}$	+		-		+
$f'(x) = -\frac{1}{x^2-x}$	-				-
f	\searrow				\searrow

Efectuado o estudo do sinal de f' , podemos concluir que f é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, 0[$, quer no intervalo $]1, +\infty[$.

d)

A recta r tem declive $m_r = 1$. Logo, as rectas perpendiculares a r têm declive $m = -\frac{1}{m_r} = -1$.

Se existem duas rectas tangentes ao gráfico de f que são perpendiculares à recta r , então existem dois pontos onde $f'(x) = -1$.

Ora,

$$\begin{aligned} f'(x) = -1 &\Leftrightarrow -\frac{1}{x^2-x} = -1 \quad \wedge \quad x \in D_f \\ &\Leftrightarrow x^2 - x = 1 \quad \wedge \quad x \in D_f \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} \quad \wedge \quad x \in D_f \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, existem de facto duas rectas tangentes ao gráfico de f que são perpendiculares à recta r . (Essas tangentes são rectas que passam nos pontos de abcissa Φ e $-\Phi^{-1}$ (Φ - número de ouro)).

3.

a)

O lugar geométrico considerado é o plano mediador do segmento de recta $[BC]$, que é nem mais o plano coordenado xOz , de equação $y = 0$.

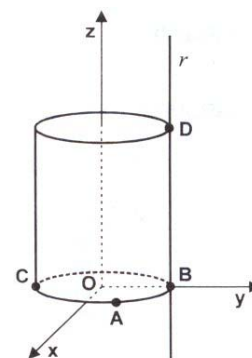
De facto, vem:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 &\Leftrightarrow (x, y, z) \cdot (0-0, -5-5, 0-0) = 0 \\ &\Leftrightarrow -10y = 0 \\ &\Leftrightarrow y = 0 \end{aligned}$$

b)

Como o ângulo CAB é um ângulo inscrito num arco de semicircunferência, então é recto. Logo, $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$. Dado que r é paralela ao eixo Oz , então é perpendicular ao plano xOy , pelo que será perpendicular a todas as rectas desse plano, em particular às rectas AB e CA .

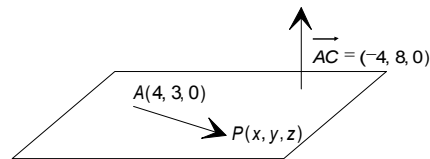
Logo, sendo $CA \perp AB$ e $CA \perp BD$, o vector \overrightarrow{AC} é perpendicular ao plano ABD , pois é perpendicular a duas rectas concorrentes (as rectas AB e BD) desse plano.



Seja $\vec{AC} = (0, -5, 0) - (4, 3, 0) = (-4, -8, 0)$, então a equação pedida é do tipo $-4x - 8y + 0z + d = 0$. Como B é um ponto desse plano, será $-4 \times 0 - 8 \times 5 + 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = 40$. Logo, $x + 2y - 10 = 0$ é uma equação do plano considerado.

Alternativa:

$$\begin{aligned} \vec{AP} \cdot \vec{AC} = 0 &\Leftrightarrow (x-4, y-3, z-0) \cdot (-4, -8, 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow -4x + 16 - 8y + 24 = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 2y - 10 = 0 \end{aligned}$$



c1)

Considerando o triângulo retângulo $[BOD]$, temos $\operatorname{tg} \alpha = \frac{BD}{OB} \Leftrightarrow BD = OB \times \operatorname{tg} \alpha$. Logo, $BD = 5 \times \operatorname{tg} \alpha$.

Considerando para base da pirâmide o triângulo retângulo $[CBD]$, a altura da pirâmide é o segmento $[AA']$, sendo A' ($A' \in Oy$) a projeção ortogonal de A sobre o plano coordenado yOz .

$$\text{Assim, temos: } V(\alpha) = \frac{1}{3} \times \frac{BC \times BD}{2} \times AA' = \frac{1}{3} \times \frac{10 \times 5 \operatorname{tg} \alpha}{2} \times 4 = \frac{100 \operatorname{tg} \alpha}{3}, \text{ com } \alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[.$$

c2)

$$\text{Ora, } \frac{100 \operatorname{tg} \alpha}{3} = \frac{100}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Dado que $\alpha \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$, o volume da pirâmide é $\frac{100}{\sqrt{3}}$ para $\alpha = \frac{\pi}{3}$ radianos.

4.

a)

$$\text{Ora, } u_{n+1} - u_n = \frac{2-3n}{2 \cdot (n+1)} - \frac{5-3n}{2n} = \frac{2n-3n^2-5n-5+3n^2+3n}{2n \cdot (n+1)} = -\frac{5}{2n \cdot (n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dado que $u_{n+1} < u_n, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão (u_n) é estritamente decrescente. Logo é monótona.

b)

O primeiro termo da sucessão é $u_1 = \frac{5-3}{2} = 1$ e como a sucessão (u_n) é estritamente decrescente, então $u_n \leq 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Isto é, a sucessão é limitada superiormente.

Aceitando a sugestão, temos $u_n = \frac{5-3n}{2n} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2n} > -\frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, pois $\frac{5}{2n} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, sendo $u_n > -\frac{3}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, a sucessão é também limitada inferiormente.

Portanto, a sucessão (u_n) é limitada, pois é limitada inferior e superiormente.

FIM

- (1) Se as duas funções têm igual derivada no intervalo considerado, então nesse intervalo elas têm igual monotonia.
- (2) Como $h(t) = 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt[3]{t} = 0 \Leftrightarrow t = 8$, o reservatório demora 8 h a ser esvaziado, pelo que fica vazio às 20 horas desse dia.
- (3) Não deve haver dúvidas. Caso contrário, peça esclarecimento.
- (4) Os semieixos maior e menor da elipse são, respectivamente, $a = 4$ e $b = 2$, sendo, portanto, $c = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3}$ metade da distância focal. Logo, os focos da elipse são $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ e $F_2(2\sqrt{3}, 0)$ e a sua equação reduzida é $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- (5) Repare que o rectângulo considerado tem dimensões $|2x|$ e $|4x|$, pelo que a sua área é dada por $A = 8x^2$. (faça um esboço)