Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

29/03/2004 **Turmas A e B - Prova 1** **11.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

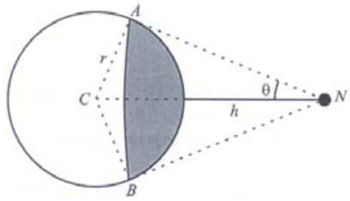
1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Prova 1	**A**	**B**	**B**	**A**	**C**

2.ª Parte

1.

a)



A área da superfície terrestre é dada por $4\pi r^2$.

A quarta parte da área da superfície terrestre é, portanto, πr^2. *O valor de* θ *a determinar é, então, a solução da equação* $f(\theta) = \pi r^2$.

Ora, $2\pi r^2(1 - sen\ \theta) = \pi r^2 \Leftrightarrow 2.(1 - sen\ \theta) = 1 \Leftrightarrow 1 - sen\ \theta = \frac{1}{2} \Leftrightarrow sen\ \theta = \frac{1}{2}$.

Como $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, *vem* $\theta = \frac{\pi}{6}$ *(radianos).*

b)

De acordo com os dados, tem-se $sen\ \theta = \frac{r}{\overline{CN}} = \frac{r}{r+h}$.

Como a área da superfície da terra visível da nave é dada por $2\pi r^2(1 - sen\ \theta)$, *temos:*

$$g(h) = 2\pi r^2\left(1 - \frac{r}{r+h}\right) = 2\pi r^2 \times \frac{r+h-r}{r+h} = 2\pi r^2 \times \frac{h}{r+h} = \frac{2\pi r^2 h}{r+h}, \text{ c.q.m..}$$

c)

Quando $h \to +\infty$, $\frac{r}{h} \to 0$ *e* $\frac{r}{h} + 1 \to 1$. *Logo,* $g(h) \to 2\pi r^2$, *quando* $h \to +\infty$.

<u>Interpretação</u>: A área da superfície da terra visível da nave aproxima-se tanto quanto se queira de metade da área da superfície total da Terra, desde que a nave esteja suficientemente longe da Terra.

2.

a)

Como sabemos, a altura de uma pirâmide é perpendicular ao plano da sua base. Ora, os vectores $\vec{u} = (6, -8, 0)$ *e* $\vec{n} = (3, -4, 0)$, *respectivamente, director da recta que contém a altura da pirâmide e vector normal ao plano considerado, são colineares, visto ser* $\vec{u} = 2\vec{n}$. *Logo, podemos concluir que a altura da pirâmide é perpendicular ao plano considerado.*
Como vértice O da base da pirâmide pertence ao plano referido, visto as coordenadas desse ponto verificarem a equação considerada, podemos concluir que a base da pirâmide está contida nesse plano.

b)

Como a pirâmide é quadrangular regular, o centro da sua base (centro do quadrado [OPQR]) é o ponto de intersecção da recta com o plano dados.
Ora, o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$ *é um ponto da recta dada, pois para* $k = -1/2$ *obtemos*

$$(x, y, z) = (7, -1, 5) - \frac{1}{2}(6, -8, 0) = (7, -1, 5) + (-3, 4, 0) = (4, 3, 5).$$

Por outro lado, o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$ *é um ponto do plano considerado, pois essas coordenadas verificam a equação do plano: a proposição* $3 \times 4 - 4 \times 3 + 0 \times 5 = 0$ *é verdadeira.*

Logo, o ponto de coordenadas $(4, 3, 5)$, sendo o ponto de intersecção da recta e planos dados, é centro da base da pirâmide.

c)

Designemos por C o centro da base da pirâmide.
Ora, o ponto C é equidistante das arestas [PQ] e [OR], por ser o centro do quadrado [OPQR]. Dado que a cota deste ponto é 5 e porque o planos OPQ e xOy são perpendiculares, podemos concluir que $\overline{OP} = 2 \times 5 = 10$.

Por outro lado, a altura da pirâmide é $\overline{CV} = \sqrt{(4+2)^2 + (3-11)^2 + (5-5)^2} = \sqrt{36+64} = 10$.

Logo o volume da pirâmide é $V = \frac{1}{3} \times 10^2 \times 10 = \frac{1000}{3}$.

3.

a)

A área de uma das bases do prisma é $A_b = x^2$ e a altura do prisma é $h = \frac{2}{x^2}$, pois o seu volume é 2. Logo, a área de uma das faces laterais é $A_{fL} = x.\frac{2}{x^2} = \frac{2}{x}$.

Assim, $A(x) = 2 \times x^2 + 4 \times \frac{2}{x} = 2x^2 + \frac{8}{x}$, para $x > 0$, c.q.m..

b)

Ora, $A'(x) = 4x - \frac{8}{x^2} = \frac{4x^3 - 8}{x^2} = \frac{4.(x^3-2)}{x^2}$, para $x > 0$.

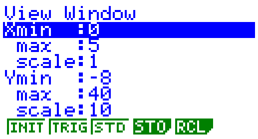
Como $x^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}$, vem:

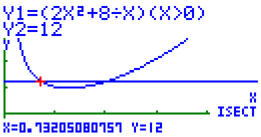
x	0		$\sqrt[3]{2}$	$+\infty$
$4.(x^3-2)$		-	0	+
x^2		+	+	+
$A'(x)$		-	0	+
$A(x)$		↘	$A(\sqrt[3]{2})$	↗
			Mín.	

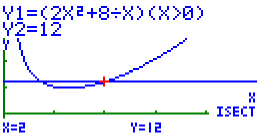
Portanto, o valor de x para o qual a área total da embalagem é mínima é $\sqrt[3]{2}$.

c)

As soluções do problema são as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função A com a recta de equação $y = 12$. Com recurso à calculadora, podemos obter parte do gráfico da função A, parte da recta de equação $y = 12$, bem como as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com a referida recta:







As solução do problema, com aproximação às décimas, são 0,7 e 2,0.

4.

a)

A taxa média de variação da função g no intervalo $[1, 4]$ é: $tmv_{[1,\,4]} = \frac{g(4)-g(1)}{4-1} = \frac{1-4}{4-1} = -1$.

b)

Ora, $tmv_{\substack{[1,\,1+h]\\ h>0}} = \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{4.(1+h)-(1+h)^2-3}{h} = \frac{4+4h-1-2h-h^2-3}{h} = \frac{h.(2-h)}{h} = 2-h$.

Quando $h \to 0$, $tmv_{\substack{[1,\,1+h]\\ h>0}} \to 2$. Logo, $f'(1^+) = 2$.

Como $f'(1^-) \neq f'(1^+)$, não existe derivada de f no ponto de abcissa 1.

c)

A derivada de f é uma f. r. v. r., de domínio $IR \setminus \{1\}$ *, definida por:* $f'(x) = \begin{cases} 1 & \Leftarrow \quad x < 1 \\ 4 - 2x & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$.

d)

O declive dessa recta tangente é $m = f'(4) = 4 - 2 \times 4 = -4$ *e o ponto de tangência é* $T(4, f(4)) = (4, 0)$.
Como $y - 0 = -4.(x - 4) \Leftrightarrow y = -4x + 16$ *, a equação pedida é* $y = -4x + 16$.

e)

Para $x \in \left]0, 4\right[$ *, vem:* $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\frac{4}{x}) = 4 \times \frac{4}{x} - (\frac{4}{x})^2 = \frac{16}{x} - \frac{16}{x^2} = 16 \cdot \frac{x-1}{x^2}$.

Logo, a função considerada é: $\begin{array}{ll} j: & \left]0,4\right[\to IR \\ & x \to 16 \cdot \dfrac{x-1}{x^2} \end{array}$

Nota: Repare que $g(\left]0, 4\right[) = \left]1, +\infty\right[$.

FIM

---

(1) Note que os declives de duas rectas perpendiculares (e oblíquas aos eixos coordenados) são simétricos e inversos, um do outro.

(2) Note que pode arranjar um contra-exemplo para cada uma das outras alternativas.

(3) Note que todo o vector director de *r* é perpendicular a qualquer vector normal a α.

(4) Sendo $h'(t) = 100 - 10t$, vem $h'(2) = 100 - 10 \times 2 = 80$.

(5) Atente na relação entre o sinal da derivada de uma função num intervalo do seu domínio e a monotonia da função nesse mesmo intervalo.