

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

01/03/2004

Turmas A e B - Prova 1

11.º Ano

Nome: _____	N.º: _____ Turma: _____
-------------	-------------------------

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Prova 1	B	C	B	C	C

2.ª Parte

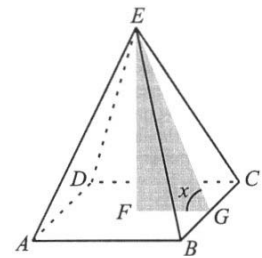
1.

a)

No triângulo rectângulo [EFG], temos $\cos x = \frac{FG}{EG}$. Logo, $\overline{EG} = \frac{1}{\cos x}$.

A área de uma face lateral é, portanto, dada por $A_f = \frac{BC \times \overline{GE}}{2} = \frac{2 \times \frac{1}{\cos x}}{2} = \frac{1}{\cos x}$.

Assim, a área total da pirâmide é dada por $A(x) = 4 + 4 \times \frac{1}{\cos x} = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$, c.q.m..



b)

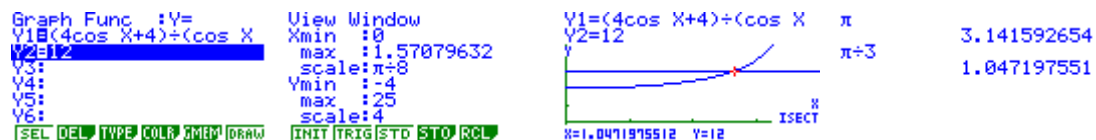
$$A(x) = 12 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4 \cos x + 4}{\cos x} = 12 \\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \cos x + 4 - 12 \cos x = 0 \\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 8 \cos x = 0 \\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{1}{2} \\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \in]0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$$

A área da pirâmide é igual a 12 para $x = \frac{\pi}{3}$.

c)

Definidas as funções $y_1 = \frac{4 \cos x + 4}{\cos x}$ e $y_2 = 12$, numa janela de visualização adequada ao contexto da situação, podemos determinar as coordenadas do ponto de intersecção dos dois gráficos:



Com recurso à calculadora gráfica, concluímos que a área total da pirâmide é igual a 12 para $x = 1,05$. (que é o valor de $\frac{\pi}{3}$ aproximado às centésimas)

d1)

Como $A(2, 0, 0)$ e $E(1, 1, 4)$, um vector director da recta AE é $\overrightarrow{AE} = (1 - 2, 1 - 0, 4 - 0) = (-1, 1, 4)$.

Logo, $(x, y, z) = (2, 0, 0) + k(-1, 1, 4)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta pedida, pelo que a equação

$$\frac{x - 2}{-1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z - 0}{4} \Leftrightarrow \frac{x - 2}{-1} = y = \frac{z}{4} \text{ define a recta AE, c.q.m..}$$

d2)

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ \frac{x-2}{-1} = y = \frac{z}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ x - 2 = -y \\ 4y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ x - 2 = -y \end{cases} \\ (3) \begin{cases} 4y - z = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) \begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ x + y = 2 \end{cases} \\ (-2) \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 11y = -5 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 3z = -5 \\ 9y = -9 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 3 \\ z = -4 \end{cases}$$

A intersecção da recta AE com o plano de equação $2x - y + 3z = -5$ é o ponto de coordenadas $(3, -1, -4)$.

d3)

A condição $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0$ define a superfície esférica de diâmetro [AC], isto é, de centro $F(1, 1, 0)$ e raio

$$r = \overline{AF} = \sqrt{(2-1)^2 + (0-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}.$$

De facto, podemos confirmar:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CP} = 0 &\Leftrightarrow (x-2, y-0, z-0) \cdot (x-0, y-2, z-0) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 2 \end{aligned}$$

2.

a)

$$\text{Ora, } P(3) = \frac{100 \times 3}{(3+2)^2} = \frac{100 \times 3}{25} = 4 \times 3 = 12.$$

Quando o valor da resistência variável for de 3Ω , a potência nela dissipada é de 12 W .

b)

Ora, se $r \rightarrow +\infty$, então $\frac{100}{r+2} \rightarrow 0$. Também, se $r \rightarrow +\infty$, então $\frac{2}{r+2} \rightarrow 0$ e, portanto, $1 - \frac{2}{r+2} \rightarrow 1$.

Logo, se $r \rightarrow +\infty$, então $P(r) = \frac{100}{r+2} \times (1 - \frac{2}{r+2}) \rightarrow 0$, c.q.m..

A potência dissipada na resistência variável aproxima-se tanto quanto se queira de zero, desde que o valor da resistência seja suficientemente elevado.

(A potência dissipada na resistência variável será praticamente nula, quando o valor da resistência for suficientemente elevado.)

c)

$$\begin{aligned} \frac{100r}{(r+2)^2} = 8 &\Leftrightarrow \frac{100r - 8r^2 - 32r - 32}{(r+2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2r^2 - 17r + 8}{(r+2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{17 \pm \sqrt{289 - 64}}{4} \wedge r \neq -2 \\ &\Leftrightarrow r = \frac{17 \pm 15}{4} \wedge r \neq -2 \\ &\Leftrightarrow (r = 8 \vee r = 0,5) \wedge r \neq -2 \\ &\Leftrightarrow r = 0,5 \vee r = 8 \end{aligned}$$

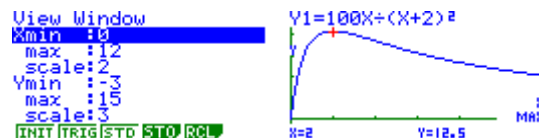
A potência dissipada é igual a 8 W , quando a resistência for de $0,5 \Omega$ ou de 8Ω .

d)

Definida a função $y_1 = \frac{100x}{(x+2)^2}$, numa janela de

visualização adequada procurou-se o máximo e o maximizante da função, obtendo-se, respectivamente, $12,5$ e $2,0$:

Portanto, a potência máxima possível de obter é de $12,5 \text{ W}$, para uma resistência de $2,0 \Omega$.



3.

a)

$$(m+n)(-1) = m(-1) + n(-1) = \frac{1}{-1} + 2 = 1 \quad \text{e} \quad (p \circ n)(2) = p(n(2)) = p(2) = \frac{2-1}{2+2} = \frac{1}{4}.$$

b)

Ora, $D_{m \circ p} = \{x \in \mathbb{R} : x \in D_p \wedge p(x) \in D_m\}$.

Logo, $D_{m \circ p} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \wedge \frac{x-1}{x+2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x \neq 1 \wedge x \neq -2\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.

Como, $(m \circ p)(x) = m(p(x)) = m\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+2}} = \frac{x+2}{x-1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$, então: $m \circ p: \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow \frac{x+2}{x-1}$

c)

Como a função n é polinomial de grau dois, com zeros $x=0$ e $x=1$, a sua expressão analítica é do tipo $y = a(x-1)x$. Dado que, por exemplo, o ponto de coordenadas $(2, 2)$ é um ponto do seu gráfico, terá de ser $2 = a(2-1) \times 2 \Leftrightarrow a = 1$. Logo, $n(x) = (x-1)x = x^2 - x$, c.q.m..

Ora, $D_{p/n} = D_p \cap D_n \cap \{x \in \mathbb{R} : n(x) \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-2\} \cap \mathbb{R} \cap \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$.

Como, $(p/n)(x) = \frac{p(x)}{n(x)} = \frac{\frac{x-1}{x+2}}{x^2 - x} = \frac{\frac{x-1}{x+2}}{x(x-1)} = \frac{x-1}{(x+2)x(x-1)} = \frac{1}{x^2 + 2x}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\}$, então:

$$p/n: \mathbb{R} \setminus \{-2, 0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow \frac{1}{x^2 + 2x}$$

d)

$$p(x) \geq m(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} \geq \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+2} - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - x - x - 2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x - 2}{x(x+2)} \geq 0$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4+8}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 - \sqrt{3} \quad \vee \quad x = 1 + \sqrt{3}$$

x	$-\infty$	-2		$1 - \sqrt{3}$		0		$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x^2 - 2x - 2$	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$x(x+2)$	+	0	-	-	-	0	+	+	+
$\frac{x^2 - 2x - 2}{x(x+2)}$	+		-	0	+		-	0	+

Logo, $p(x) \geq m(x) \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2[\cup [1 - \sqrt{3}, 0[\cup [1 + \sqrt{3}, +\infty[$.

FIM

- (1) Ora, $h(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \vee x = -3$. Como g tem dois zeros positivos, então apenas $\{-3, 1, 4\}$ pode ser o conjunto de zeros de h .
- (2) Repare que quando $x = 0$, a área da secção é igual à área da face do cubo (A_f); quando $x \rightarrow +\infty$, $g(x) \rightarrow A_f$.
- (3) Para $t = 0$, é $h = 0$, pois nesse instante o tanque está vazio (exclui as alternativas A e C); Quando o tanque está cheio, é $h = 4$, pelo que $4 = \frac{2t}{35} \Leftrightarrow t = 70$ (o que confirma a alternativa B).
- (4) Qualquer vector director da recta tem de ser perpendicular a qualquer vector normal ao plano.
 Logo, $(1, 1, m) \cdot (1, 2, 3) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2 + 3m = 0 \Leftrightarrow m = -1$.
- (5) O valor mínimo de $\cos(2x)$ é -1 . Logo, o máximo de g é $10 - 3 \times (-1) = 10 + 3 = 13$.