Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

26/01/2004 **Turmas A e B - Prova 2** **11.º Ano**

Nome: ______________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1[1]	2[2]	3[3]	4[4]	5[5]
Prova 2	C	B	A	C	D

2.ª Parte

1.

a)

Os vectores $\vec{r} = (2, 3, 1)$ *e* $\vec{s} = (2, 1, -1)$*, directores das rectas r e s, respectivamente, não são colineares, pois as suas coordenadas não são proporcionais. Logo as rectas não são paralelas.*
O ponto A de coordenas $(1, -1, 0)$ *é ponto quer de r quer de s, pois as suas coordenadas verificam as equações destas rectas.*
Logo, as rectas r e s são concorrentes e, por isso, definem um plano.

b)

Um vector normal ao plano α *é* $\vec{n}_\alpha = (1, -1, 1)$.
Como $\vec{n}_\alpha . \vec{r} = 1\times 2 - 1\times 3 + 1\times 1 = 0$ *e* $\vec{n}_\alpha . \vec{s} = 1\times 2 - 1\times 1 + 1\times(-1) = 0$*, o vector* $\vec{n}_\alpha$ *é perpendicular às rectas r e s, concorrentes em A. Consequentemente,* $\vec{n}_\alpha$ *é também normal ao plano definido por essas duas rectas, pelo que os planos são paralelos (estritamente paralelos, pois* $A \notin \alpha$ *).*

c)

Ora, $\cos(\vec{r}\,\hat{}\,\vec{s}) = \dfrac{(2, 3, 1).(2, 1, -1)}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}\times\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{4+3-1}{\sqrt{14}\times\sqrt{6}} = \dfrac{6}{2\sqrt{21}} = \dfrac{3\sqrt{21}}{21} = \dfrac{\sqrt{21}}{7}$.

Logo, $\vec{r}\,\hat{}\,\vec{s} = \cos^{-1}(\frac{\sqrt{21}}{7}) \approx 49°$ *e, portanto, o ângulo das duas rectas tem a mesma amplitude, pois o ângulo dos vectores directores de r e s é agudo.*

d)

$$\begin{matrix}(-2)\\ \\(-2)\end{matrix}\begin{cases} x-y+z=10 \\ 2x-y-z=9 \\ x+3y+2z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y-2z=-20 \\ 2x-y-z=9 \\ -2x-6y-4z=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix}(7)\\ \\ \\ \end{matrix}\begin{cases} y-3z=-11 \\ 2x-y-z=9 \\ -7y-5z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3z=-11 \\ 2x-y-z=9 \\ -26z=-78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=3 \\ y=-2 \\ x=5 \end{cases}$$

O sistema é possível e determinado, logo os três planos intersectam-se no ponto de coordenadas $(5, -2, 3)$.

2.

a)

Dado que $D\ (4, 0, 4)$ *e* $E\ (2, 2, -2)$*, um vector director da recta DE é*
$\overrightarrow{DE} = (2, 2, -2) - (4, 0, 4) = (-2, 2, -6)$.
Logo, a recta DE pode ser definida pela condição $\dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y-0}{2} = \dfrac{z-4}{-6}$*, donde (multiplicando os seus membros por –3) se obtém* $x - 4 = -y = \dfrac{z-4}{3}$*, c.q.m..*

b)

Como a recta DE é perpendicular ao plano considerado, um vector normal a este plano é $\overrightarrow{DE} = (-2, 2, -6)$*, pelo que a equação procurada é do tipo* $-2x + 2y - 6z = d$*. Como* $B\ (0, 4, 4)$ *é um ponto desse plano, as suas coordenadas têm de verificar a equação anterior. Assim,* $-2\times 0 + 2\times 4 - 6\times 4 = d \Leftrightarrow d = -16$*, pelo que uma equação do plano considerado é* $x - y + 3z = 8$.

3.

a)

Os ângulos P_2P_1B e P_2QQ_2 são geometricamente iguais, pois são ângulos de lados directamente paralelos. Considerando, sucessivamente, os triângulos rectângulos $[P_1Q_1Q]$ e $[P_2Q_2Q]$, vem:

$$\operatorname{sen} x = \frac{6}{\overline{P_1Q}} \quad e \quad \cos x = \frac{8}{\overline{P_2Q}}, \text{ donde } \overline{P_1Q} = \frac{6}{\operatorname{sen} x} \quad e \quad \overline{P_2Q} = \frac{8}{\cos x}.$$

Logo, $c(x) = \dfrac{6}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{8}{\cos x} = \dfrac{6\cos x}{\operatorname{sen} x \,.\cos x} + \dfrac{8\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \,.\cos x} = \dfrac{8\operatorname{sen} x + 6\cos x}{\operatorname{sen} x\,.\cos x}$, *c.q.m..*

b)

Ora, $\overline{BP_1} = \overline{BP_2}$ *quando o triângulo rectângulo $[P_1BP_2]$ for isósceles, logo* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Como $c(\frac{\pi}{4}) = \dfrac{8 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 6 \times \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}} = \dfrac{7\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = 14\sqrt{2} \approx 19{,}8$, *o comprimento da ponte nessas condições é aproximadamente 19,8 m.*

c)

A amplitude do ângulo P_2P_1B é mínima quando os pontos P_1 e A são coincidentes; é máxima quando são coincidentes os pontos P_2 e C.

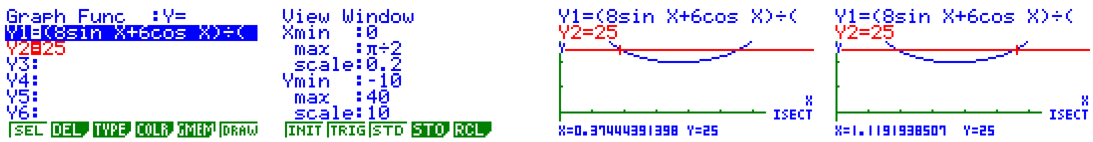
Assim, $tg\ (x_{mín}) = \dfrac{6}{20-8} = \dfrac{1}{2}$ *e* $tg\ (x_{máx}) = \dfrac{30-6}{8} = 3$, *donde* $x_{mín} = tg^{-1}\frac{1}{2} \approx 0{,}46$ *rad e*

$x_{máx} = tg^{-1}3 \approx 1{,}25$ *rad. Logo,* $0{,}46 \le x \le 1{,}25$ *, aproximadamente.*

d)

Pretende-se resolver a equação $c(x) = 25$ *no intervalo* $[0{,}46\,;1{,}25]$, *aproximadamente.*

Para isso consideraram-se as funções $y_1 = \dfrac{8\operatorname{sen} x + 6\cos x}{\operatorname{sen} x\,.\cos x}$ *e* $y_2 = 25$ *e (numa janela adequada, considerando o contexto da situação) determinaram-se as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos:*



Dado que $0{,}46 \le x \le 1{,}25$ *(aproximadamente), conclui-se que o problema apenas possui uma solução:* $x = 1{,}12$ *, considerando a aproximação solicitada.*

4.

Por exemplo:
A função f não está definida para $x = -2$ *e a função g não está definida para* $x = 2$.
O gráfico de f possui uma assimptota vertical de equação $x = -2$ *e uma horizontal de equação* $y = 1$*; o gráfico de g possui uma assimptota vertical de equação* $x = 2$.

Por outro lado, $f(-3) = 1 - (-1) = 2$ *e* $g(-3) = \dfrac{0}{-3-2} = 0$.

Logo, f→[A] e g→[B].

5.

a)

Ora, $T(0) = \dfrac{180 \times 0 + 26}{1+0} = 26$. *Logo, quando é ligado o forno está à temperatura de 26º C.*

Como $T(m) = \dfrac{180m + 26}{1+m} = \dfrac{180.(m+1) - 154}{m+1} = \dfrac{180.(m+1)}{m+1} + \dfrac{-154}{m+1} = 180 - \dfrac{154}{m+1}$, *então quando* $m \to +\infty$, $\dfrac{154}{m+1} \to 0$ *e, portanto,* $T(m) = 180 - \dfrac{154}{m+1} \to 180$. *Por isso, estando o forno ligado durante um período de tempo suficientemente grande, a sua temperatura tende a estabilizar a 180º C.*

b)

Ora,

$$\begin{aligned} T(m) \le 100 \;&\Leftrightarrow\; \frac{180m+26}{m+1} \le 100 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{180m+26}{m+1} - 100 \le 0 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{180m+26-100m-100}{m+1} \le 0 \\ &\Leftrightarrow\; \frac{80m-74}{m+1} \le 0 \end{aligned}$$

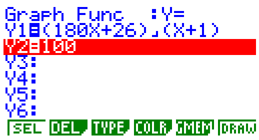
Tendo em consideração que a função apenas está definida para $m \ge 0$*, vem:*

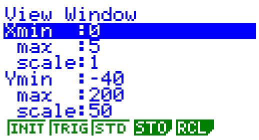
m	0		$\frac{74}{80}$	$+\infty$
$80m-74$	-	-	0	+
$m+1$	+	+	+	+
$\frac{80m-74}{m+1}$	-	-	0	+

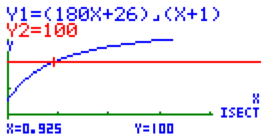
Logo, $T(m) \le 100 \Leftrightarrow m \in \left[0, \frac{37}{40}\right]$.

Como $\frac{37}{40}$ min $= 0{,}925$ min $= 0{,}925 \times 60$ $s = 55{,}5$ s*, após ter sido ligado, a temperatura do forno é não superior a 100º C durante 55,5 segundos.*

Pretende-se resolver a condição $T(m) \le 100$*, com* $m \ge 0$*. Para isso consideraram-se as funções* $y_1 = \frac{180\,x + 26}{x+1}$ *e* $y_2 = 100$ *e (numa janela adequada, considerando o contexto da situação) determinaram-se as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos:*







Face aos resultados obtidos, confirma-se a solução encontrada analiticamente.

FIM

(1) A função $\frac{f}{g}$ não está definida para o zero de g ($x = 2$).

(2) Repare que quando $c \to -1$, quer quando $c \to 1$, $V \to 0$. (Por exemplo)

(3) Como $sen\,\alpha = \overline{BC}$ e $\cos\alpha = \overline{OC}$, então $A_{[ABCD]} = \overline{BC} \times 2.\overline{OC} = 2.sen\,\alpha.\cos\alpha$.

(4) Uma possibilidade poderá consistir na visualização geométrica de cada uma das alternativas apresentadas.

(5) Determine a intersecção do plano dado com os eixos coordenados:

Eixo Ox: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$; Eixo Oy: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{cases}$; Eixo Oz: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+2y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=1 \end{cases}$