Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

24/11/2003 **Turmas A e B - Prova 1** **11.º Ano**

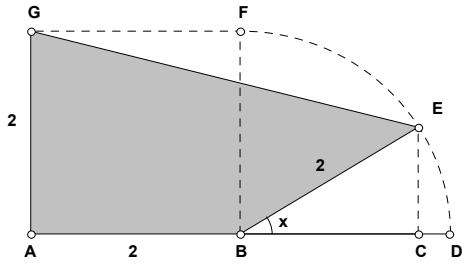
Nome: _____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**C**	**A**	**C**	**C**

2.ª Parte

1.



a)

Vamos aceitar a sugestão dada.

Ora, $sen\ x = \frac{\overline{EC}}{\overline{BE}}$, *logo* $\overline{EC} = 2sen\ x$;

$\cos x = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}}$, *logo* $\overline{BC} = 2\cos x$.

Assim, a área do polígono [ABEG] é dada em função de x *, por:*

$$\begin{aligned} A_{[ABEG]} &= A_{[ACEG]} - A_{[BCE]} \\ &= \frac{\overline{AG} + \overline{CE}}{2} \times \overline{AC} - \frac{\overline{BC} \times \overline{CE}}{2} \\ &= \frac{2 + 2sen\ x}{2} \times (2 + 2\cos x) - \frac{(2\cos x) \times (2sen\ x)}{2} \\ &= (1 + sen\ x) \times (2 + 2\cos x) - 2\cos x.sen\ x \\ &= 2 + 2\cos x + 2sen\ x + 2sen\ x.\cos x - 2\cos x.sen\ x \\ &= 2(1 + sen\ x + \cos x) \end{aligned}$$

b)

Ora, $A(0) = 2(1 + 0 + 1) = 4$ *e* $A(\frac{\pi}{2}) = 2(1 + 1 + 0) = 4$.

Para $x = 0$ *, o polígono sombreado é o triângulo rectângulo [ADG], cuja área é* $4 = \frac{4 \times 2}{2}$.

Para $x = \frac{\pi}{2}$ *, o polígono sombreado é o quadrado [ABFG], cuja área é também* $4 = 2 \times 2$.

c)

Ora,

$$\begin{aligned} 2\cos x - 2sen\ x = 0 &\Leftrightarrow \cos x = sen\ x \\ &\Leftrightarrow \cos x = \cos(\tfrac{\pi}{2} - x) \\ &\Leftrightarrow x = \pm(\tfrac{\pi}{2} - x) + 2k\pi,\ k \in Z \\ &\Leftrightarrow 2x = \tfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in Z \\ &\Leftrightarrow x = \tfrac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z \end{aligned}$$

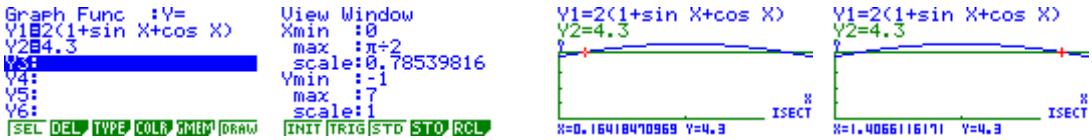
A equação dada apenas tem uma solução no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *:* $x = \frac{\pi}{4}$ *, que será então o maximizante da área do polígono sombreado.*

O valor máximo da área é, então, $A_{máx} = 2(1 + sen\ \frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) = 2(1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 2\sqrt{2}$.

d)

Pretende-se resolver a equação $A(x) = 4{,}3$ *no intervalo* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Para isso consideraram-se as funções y_1 *e* y_2 *(a seguir indicadas) e, (numa janela adequada) tendo em consideração o domínio da função dada, determinaram-se as abcissas dos pontos de intersecção dos dois gráficos:*



Portanto, de acordo com o arredondamento pedido, os valores desejados são: $x = 0{,}2$ *ou* $x = 1{,}4$.

2.

Ora, $sen(\pi + \alpha) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -sen\ x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow senx = -\frac{1}{3}$.

E, $A = 2tg(-\alpha) - sen(\frac{\pi}{2} - \alpha) + \cos(\pi - \alpha) = -2tg\ \alpha - \cos\alpha - \cos\alpha = -2tg\ \alpha - 2\cos\alpha$.

Dado que $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$, *então* $\cos\alpha > 0$.

Assim, utilizando a fórmula fundamental da trigonometria, vem: $\cos\alpha = +\sqrt{1-(-\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

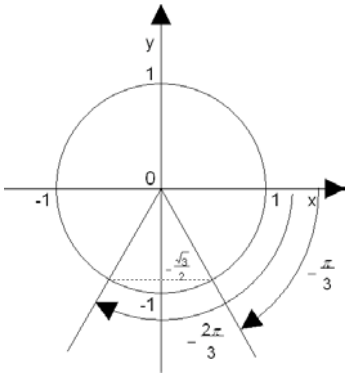
Logo, $A = -2\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} - 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3} = \underset{(3)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} - \underset{(2)}{\frac{4\sqrt{2}}{3}} = -\frac{5\sqrt{2}}{6}$.

3.

a)

Tendo em consideração a figura ao lado, vem imediatamente

$sen\ x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \ \wedge\ x \in \left]-\pi, \pi\right[\Leftrightarrow x \in \left]-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right[$.



b)

$$tg(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in Z$$

4.

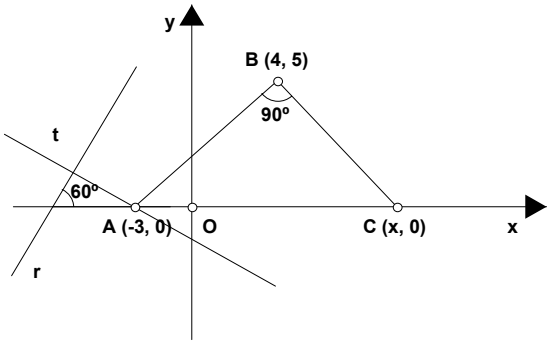
a)

Seja t a recta perpendicular a r e que contém o ponto A.
Ora, como o declive da recta r é $m_r = tg\ 60^\circ = \sqrt{3}$, *então*

o declive da recta t é $m_t = -\frac{1}{m_r} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Assim, a equação reduzida de t é do tipo $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + b$.

Como A pertence a t, então as coordenadas de A verificam esta equação, logo



$0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\times(-3) + b \Leftrightarrow b = -\sqrt{3}$. *Logo, a equação pedida é* $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$.

b)

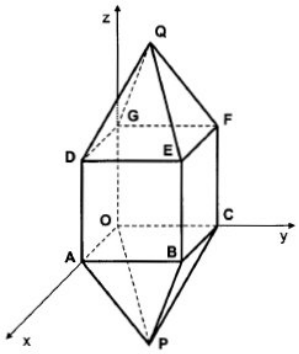
Tendo em consideração que os vectores $\overrightarrow{BA}$ *e* $\overrightarrow{BC}$ *são perpendiculares, o seu produto escalar é zero.*

Ora, $\overrightarrow{BA} = (-7, -5)$ *e* $\overrightarrow{BC} = (x-4, -5)$.

Assim, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow (-7, -5)(x-4, -5) = 0 \Leftrightarrow (-7x+28)+25 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{43}{7}$.

Portanto, $C\ (\frac{43}{7}, 0)$.

5.



a)

Sendo $G\ (0, 0, 2)$ *e* $P\ (1, 1, -2)$*, então* $\overrightarrow{PG} = (-1, -1, 4)$.
Logo, $(x, y, z) = (0, 2, 2) + k(-1, -1, 4), k \in IR$ *é uma equação vectorial da recta pedida.*

b)

Os vectores $\overrightarrow{AG} = (0, 0, 2) - (2, 0, 0) = (-2, 0, 2)$ *e*
$\overrightarrow{CP} = (1, 1, -2) - (0, 2, 0) = (1, -1, -2)$ *são vectores directores das rectas consideradas.*

Ora, $\cos(\overrightarrow{AG}\,\hat{}\,\overrightarrow{CP}) = \dfrac{(-2, 0, 2).(1, -1, -2)}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 2^2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \dfrac{-2+0-4}{\sqrt{8} \times \sqrt{6}} = -\dfrac{6\sqrt{6}}{2\sqrt{2} \times 6} = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Logo, $\overrightarrow{AG}\,\hat{}\,\overrightarrow{CP} = 150^\circ$ *e, portanto, o ângulo das duas rectas é* $\alpha = 180^\circ - 150^\circ = 30{,}0^\circ$.

c)

Sendo $A\ (2, 0, 0)$ *e* $F\ (0, 2, 2)$*, então* $\overrightarrow{AF} = (-2, 2, 2)$.
Ora, um vector perpendicular a $\overrightarrow{AF}$ *é, por exemplo,* $\vec{w} = (0, 1, -1)$*, pois* $\overrightarrow{AF} \cdot \vec{w} = 0$.
Como $\left\|\vec{w}\right\| = \sqrt{2}$*, então* $\vec{v} = 10 \times \dfrac{\vec{w}}{\sqrt{2}} = (0, \frac{10}{\sqrt{2}}, -\frac{10}{\sqrt{2}}) = (0, 5\sqrt{2}, -5\sqrt{2})$ *é um vector perpendicular a* $\overrightarrow{AF}$ *e de norma 10.*

FIM

---

(1) Ora, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{OP}\right\| \cdot \cos(\overrightarrow{OA}\,\hat{}\,\overrightarrow{OP}) = 1 \times 1 \times \cos x$. Logo, $f(x) = \cos x \wedge x \in [0, \pi]$.

(2) Designado por P (1,0), é $tg\ \alpha = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{OP}} = \dfrac{\overline{AP}}{1} = \overline{AP}$.

Logo $A = \dfrac{\pi \times \overline{OP}^2}{4} + \dfrac{\overline{OP} \times \overline{AP}}{2} = \dfrac{\pi \times 1^2}{4} + \dfrac{1 \times tg\ \alpha}{2} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{tg\ \alpha}{2}$.

(3) Ora, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,\overrightarrow{BA}) = 4 \times 4 \cos 180^\circ = -16$.

(4) Tenha em consideração que as rectas para serem perpendiculares, dois quaisquer vectores directores dessas rectas também têm de ser perpendiculares (ou que os seus declives têm de ser simétricos e inversos, um do outro).

(5) Tenha em consideração que $-1 < \cos x < 0, \forall x \in 2.^\circ Q$.
Logo, $-1 + 2 < 2 + \cos x < 0 + 2, \forall x \in 2.^\circ Q \Leftrightarrow 1 < 2 + \cos x < 2, \forall x \in 2.^\circ Q$.