

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

20/10/2003

Turmas A e B - Prova 1

11.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	A	D	C	D	C

2.ª Parte

1.

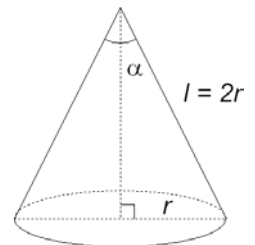
a)

O cone rodando sobre uma superfície horizontal e plana, apoiando-se sucessivamente em todas as suas geratrizes, vai descrever um círculo de centro em V e raio l.

b)

Como o cone retorna ao ponto de partida, depois de ter efectuado duas revoluções completas em torno do seu eixo de simetria, então o círculo referido na alínea anterior tem um perímetro que é duplo do da base do cone.

Assim, $2\pi \times l = 2 \times (2\pi \times r) \Leftrightarrow l = 2r$. Logo, sendo $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{2r} = \frac{1}{2}$, é $\frac{\alpha}{2} = 30^\circ$ e, portanto, $\alpha = 60^\circ$.



2.

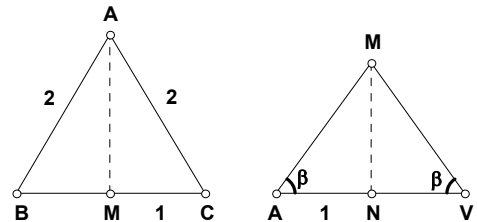
Como o tetraedro é regular, as suas faces são triângulos equiláteros geometricamente iguais, sendo

$$\overline{VM} = \overline{AM} = \sqrt{2^2 - 1} = \sqrt{3}.$$

Considerando agora o triângulo isósceles [AVM], traçando a sua

altura relativamente a [AV], temos $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Logo, $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 54,7^\circ$ é a amplitude do ângulo considerado.



3.

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3 \cdot \text{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - 3 \times \frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}{2}$, c.q.m.

b)

Ora, para os valores em que a expressão tem significado, vem:

$$1 - \cos^2 x + \frac{\text{sen}^2 x}{\text{tg}^2 x} = 1 - \cos^2 x + \frac{\text{sen}^2 x}{\frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} = 1 - \cos^2 x + \text{sen}^2 x \cdot \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 - \cos^2 x + \cos^2 x = 1, \text{ c.q.m.}$$

4.

$$\begin{aligned} 2 \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \cos(7\pi + x) - \text{tg}\left(\frac{13\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) &= 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos(6\pi + \pi + x) - \text{tg}\left(3\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) \\ &= \sqrt{3} - \cos(\pi + x) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(-x) \\ &= \sqrt{3} + \cos x - 1 - \cos x \\ &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

5.

$$\text{Ora, } \operatorname{sen}(\pi + x) = -\frac{3}{7} \Leftrightarrow -\operatorname{sen} x = -\frac{3}{7} \Leftrightarrow \operatorname{sen} x = \frac{3}{7}.$$

$$\text{E, } A = \operatorname{tg}(\pi - x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{tg}(-x) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x.$$

Como $x \in 2.^\circ\text{Q}$, então $\cos x < 0$. Assim, aplicando a fórmula fundamental da trigonometria, temos:

$$\cos x = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2} = -\sqrt{\frac{40}{49}} = -\frac{2\sqrt{10}}{7}.$$

$$\text{Logo, } A = -\operatorname{tg} x + \operatorname{sen} x = -\frac{\frac{3}{7}}{-\frac{2\sqrt{10}}{7}} + \frac{3}{7} = \frac{3}{2\sqrt{10}} + \frac{3}{7} = \frac{3}{20} + \frac{3}{7} = \frac{3\sqrt{10}}{20} + \frac{3}{7} = \frac{21\sqrt{10} + 60}{140}.$$

6.

$$\text{Ora, quando } x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right], \operatorname{tg} x \in [1, +\infty[.$$

$$\text{Logo, } \operatorname{tg} x = k^2 - 3 \wedge x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow k^2 - 3 \geq 1 \Leftrightarrow k^2 \geq 4 \Leftrightarrow k \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty).$$

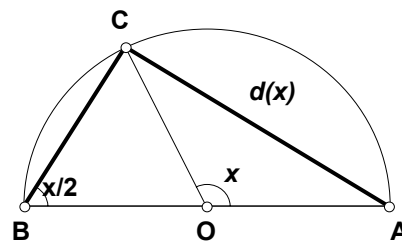
(Tenha em consideração as propriedades da função quadrática)

7.

a)

Ora, $d(x) = \overline{AB}$ para $x = \pi$, isto é, quando $C \equiv B$.

Como $d(\pi) = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 2 \times 1 = 2$, então $\overline{AB} = 2$ e, portanto, a semicircunferência tem raio 1.



b)

O triângulo $[ABC]$ é retângulo em C pois o ângulo ACB está inscrito numa semicircunferência, sendo, por isso, recto.

Ora, $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{x}{2}$, visto o ângulo inscrito ABC compreender o arco AC entre os seus lados.

Assim, $\cos \frac{x}{2} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{\overline{BC}}{2}$ e, portanto, $\overline{BC} = 2 \cdot \cos \frac{x}{2}$, c.q.m.

c)

$$\text{Ora, } A(x) = \frac{\overline{AC} \times \overline{BC}}{2} = \frac{2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \times 2 \cdot \cos \frac{x}{2}}{2} = 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \operatorname{sen} \left(2 \times \frac{x}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \text{ c.q.m.}$$

A área do triângulo é máxima quando $\operatorname{sen} x$ for máximo ($x \in [0, \pi]$), o que acontece para $x = \frac{\pi}{2}$.

d)

$$\text{O perímetro do triângulo é dado por } P(x) = \overline{AB} + \overline{AC} + \overline{BC} = 2 + 2 \cdot \operatorname{sen} \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{x}{2} = 2 \cdot \left(1 + \operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right).$$

Introduzida a expressão algébrica que define a função e ajustada uma janela de visualização adequada, com a função **GSolv + Max** obtiveram-se os seguintes valores: $P_{\max} \approx 4,83$ para $x \approx 1,57$ rad.



Considerando agora $x \in]0^\circ, 180^\circ[$, obteve-se: $P_{\max} \approx 4,83$ para $x \approx 90,00^\circ$.



É de supor que o maximizante da área do triângulo é também maximizante do seu perímetro e, assim sendo,

$$\text{será } P_{\max} = 2 \cdot (1 + \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cos} \frac{\pi}{4}) = 2 \times (1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2 + 2\sqrt{2}.$$

FIM

(1) Se considerar uma recta paralela a r passando por P , obtém um triângulo $[PCQ]$, rectângulo em Q .

$$\text{Donde, } \cos \alpha = \frac{CQ}{CP} \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{CQ}{1} \Leftrightarrow CQ = \cos \alpha. \text{ Logo, } d(\alpha) = r + \cos \alpha = 1 + \cos \alpha.$$

Em alternativa, podia eliminar três das opções testando, por exemplo, para $x = 0$ e $x = \frac{\pi}{2}$.

(2) Basta reparar que $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \operatorname{sen} 150^\circ$, por exemplo.

(3) Se não acertou, reveja a definição de radiano.

$$(4) \text{ Ora, } \overline{OP} = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Reparando que $\cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha)$, basta rebater o triângulo $[OPA]$ (A é o ponto de coordenadas $(1, 0)$) para o primeiro

$$\text{quadrante, onde se tem } \cos \alpha = \cos(2\pi - \alpha) = \frac{AO}{P'O} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

(5) Ora, $\operatorname{tg}(4\pi + \beta) > 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \beta > 0$, logo $\beta \in 1.^\circ Q \vee \beta \in 3.^\circ Q$.

Ora, $\cos(-\beta) < 0 \Leftrightarrow \cos \beta < 0$, logo $\beta \in 2.^\circ Q \vee \beta \in 3.^\circ Q$.

Portanto, $\beta \in 3.^\circ Q$.