Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Global de Matemática

11.º Ano **Provas 1 e 2** **Junho/99**

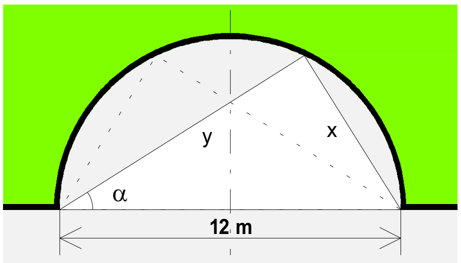
Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**D**	**A**	**D**	**C**	**C**
Questão	*5*	*2*	*4*	*3*	*1*
Prova 2	**F**	**G**	**G**	**H**	**E**

2.ª Parte

1.



a) Tendo em consideração que o triângulo é rectângulo, temos

$\operatorname{sen}\alpha = \frac{x}{12}$ e $\cos\alpha = \frac{y}{12}$, donde $x = 12\operatorname{sen}\alpha$ e $y = 12\cos\alpha$.

Portanto, a área será:

$$A(\alpha) = \frac{12\operatorname{sen}\alpha \times 12\cos\alpha}{2} = 72\operatorname{sen}\alpha.\cos\alpha\ , \quad \text{para } 0^\circ < \alpha < 90^\circ .$$

b) $A(30^\circ) = 72\operatorname{sen}30^\circ \times \cos 30^\circ = 72 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 18\sqrt{3}$. $A(60^\circ) = 72\operatorname{sen}60^\circ \times \cos 60^\circ = 72 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = 18\sqrt{3}$.

Quando as amplitudes de α forem as indicadas (ou quaisquer outras de ângulos complementares), os canteiros possuem igual área, diferindo apenas na sua colocação no pátio semicircular. De acordo com o desenho, serão simétricos em relação à mediatriz do diâmetro considerado.

c) Como $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, sabendo que $tg\,\alpha = \frac{3}{4}$ e que $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, temos:

$\cos\alpha = +\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{3}{4})^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{5}$ e (pela F.F.T.), portanto, $\operatorname{sen}\alpha = +\sqrt{1-(\frac{4}{5})^2} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$.

Assim, nessa circunstância, a área do canteiro será $A = 72 \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = 34{,}56$ metros quadrados.

2. Comecemos por determinar a expressão geral das soluções da equação $N(t) = 10$.

$$12 + 4.\cos\left(\frac{\pi.t}{6}\right) = 10 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi.t}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi.t}{6} = \mp\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow t = \mp 4 + 12k,\ \ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow t = 4 + 12k \ \vee\ t = -4 + 12k,\ \ k \in Z$$

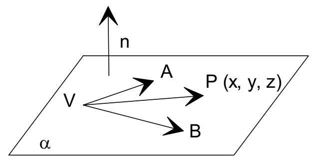
As soluções que pretendemos pertencem ao intervalo $[0,\ 24]$.

Logo, nesse dia, o nível da água no depósito foi de 10 metros às: 4 h, 8 h, 16 h e 20 h.

3.

a) Como V (2, 2, 0), B (4, 4, 3) e A (4, 0, 3), então são vectores do plano AVB os vectores $\overrightarrow{VA} = (2, -2, 3)$ e $\overrightarrow{VB} = (2, 2, 3)$.

Designado por $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$ um vector genérico normal ao plano AVB (α), será:



$$\begin{cases} (a,b,c).(2,-2,3) = 0 \\ (a,b,c).(2,2,3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 2b + 3c = 0 \\ 2a + 2b + 3c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4b = 0 \\ a = -\frac{3}{2}c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -\frac{3}{2}c \end{cases}$$

Assim, $\vec{n} = (-3, 0, 2)$ (por exemplo, para $c = 2$) é um vector normal ao plano AVB.

Designado P (x, y, z) um ponto genérico do plano, os vectores $\overrightarrow{VP}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares, logo:
$(x-2, y-2, z-0).(-3, 0, 2) = 0 \Leftrightarrow -3x + 6 + 2z = 0 \Leftrightarrow -3x + 2z = -6$.

Portanto, $-3x + 2z = -6$ é uma equação cartesiana do plano AVB.

b) Como $z = 0$ é uma equação do plano xOy, temos: $\begin{cases} -3x + 2z = -6 \\ z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = 0 \\ y = 2 \end{cases}$.

A intersecção dos três planos considerados é o ponto V, vértice da pirâmide.

c) Ora, C (0, 4, 3) e A (4, 0, 3).

O centro da esfera é M ($\frac{0+4}{2}$, $\frac{4+0}{2}$, $\frac{3+3}{2}$) = (2, 2 , 3), ponto médio do segmento de recta [AC].

O raio da esfera é $r = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{\sqrt{(4-0)^2 + (0-4)^2 + (3-3)^2}}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Logo, $(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 \leq 8$ é uma condição que define essa esfera.

4.

a)

$$a(t) \geq 4 \Leftrightarrow 2 + \frac{5.t}{t^2+1} - 4 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 + 2 + 5t - 4t^2 - 4}{t^2+1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-2t^2 + 5t - 2}{t^2+1} \geq 0$$

$$-2t^2 + 5t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-5 \mp \sqrt{25-16}}{-4} \Leftrightarrow t = \frac{-5 \mp 3}{-4} \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \tfrac{1}{2}$$

Como a função apenas está definida em $[0, 10]$ e tendo em consideração o sinal da função quadrática, vem:

t	0		$\frac{1}{2}$		2		10
$-2t^2+5t-2$	-	-	0	+	0	-	-
t^2+1	+	+	+	+	+	+	+
$\frac{-2t^2+5t-2}{t^2+1}$	-	-	0	+	0	-	-

Portanto, a área ocupada pela infecção foi superior ou igual a 4 cm^2 durante 1h e 30 minutos ($2 - \frac{1}{2} = 1{,}5$).

b) Tendo em consideração que $t^2 + 1 > 0, \forall t \in IR$, o sinal de $a'(t) = \frac{5.(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$ dependerá do sinal de $5.(1-t^2)$.

t	0		1		10
$a'(t)$	+	+	0	-	-
$a(t)$	2	↗	4,5	↘	$2 + \frac{50}{101}$
	Mín		Máx		Mín

No momento em que foi iniciada a observação, a área ocupada pela infecção era de 2 cm^2. Esta área foi aumentando durante a primeira hora de observação, apresentando então o seu valor máximo de 4,5 cm^2.
A partir desse momento a área da infecção cutânea diminuiu até ao fim da observação, sendo o seu valor final de aproximadamente 2,5 cm^2.

5.

a)

$$f(x)=h(x) \Leftrightarrow 4+\sqrt{x+1}=3-x$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=-1-x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+1=1+2x+x^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2+x=0$$
$$\Leftrightarrow x.(x+1)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \ \vee \ x=-1$$

Verificação:

Para $x=0$, vem $4+1=3-0$, que é uma proposição falsa.
Para $x=-1$, vem $4+0=3+1$, que é uma proposição verdadeira.

Portanto, a equação dada apenas tem uma solução: $x=-1$.

b) $(g\circ h)(-1)=g(h(-1))=g(4)=\dfrac{5-8}{6}=-\dfrac{1}{2}$.

Como $g(x)=\dfrac{5-2x}{x+2}=\dfrac{-2(x+2)+9}{x+2}=-2+\dfrac{9}{x+2}$, então:

Quando $x\to\mp\infty$, então $g(x)\to-2$.
Logo, a recta de equação $y=-2$ é uma assimptota horizontal do gráfico de g.

Quando $x\to-2^{\mp}$, então $g(x)\to\mp\infty$.
Logo, a recta de equação $x=-2$ é uma assimptota vertical do gráfico de g.

c) $D_g=IR\setminus\{-2\}$ e $D'_g=IR\setminus\{-2\}$ (este último, do que sabemos do estudo da função do tipo $y=a+\dfrac{b}{x-c}$).

Sendo $y=\dfrac{-2x+5}{x+2}$, então $y(x+2)=-2x+5 \Leftrightarrow x(y+2)=5-2y$. Logo, $x=\dfrac{5-2y}{y+2}$.

Assim,

$$g^{-1}: \ IR\setminus\{-2\}\to IR\setminus\{-2\}$$
$$x\to\frac{5-2x}{x+2}$$

6.

$$v_n=1{,}2 \Leftrightarrow \frac{2n}{n+1}=\frac{6}{5}$$
$$\Leftrightarrow 10n=6n+6 \quad (\text{pois } n\in \text{IN})$$
$$\Leftrightarrow n=\frac{3}{2}$$

Como $\dfrac{3}{2}\notin IN$, então 1,2 não é termo de (v_n).

Ora,

$$\begin{aligned} v_{n+1}-v_n &= \frac{2n+2}{n+2}-\frac{2n}{n+1} \\ &= \frac{2n^2+2n+2n+2-2n^2-4n}{(n+2)(n+1)} \\ &= \frac{2}{(n+2)(n+1)}>0,\ \forall n\in IN \end{aligned}$$

Portanto, a sucessão é estritamente crescente, pois $v_{n+1}-v_n>0,\ \forall n\in IN$.

O Professor

---

(1) 4, 8 12 e 16 são o número de círculos de cada uma das figuras. A primeira figura tem 4 círculos e a figura de ordem seguinte tem mais 4 círculos do que a anterior. Estamos face à sucessão dos múltiplos naturais de 4.

(2) Por exemplo, basta reparar que *h* não está definida para $x=-1$, zero de *f*.

(3) Um vector director de *r* é $\vec{r}=(1,2,3)$ e um vector normal a α é $\vec{n}=(3,0,-1)$. Ora, $\vec{r}.\vec{n}=3+0-3=0$. Logo, r é paralela a α. Note que as coordenadas de *P* não verificam a equação de *r* nem a equação de α.

(4) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}=\overline{AB}\times\overline{AP}\times\cos B\hat{A}P=\overline{AB}\times\overline{AP}\times\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AP}}=\overline{AB}^2=4$. (ou $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP}=2\times\sqrt{2^2+1^2}\times\cos B\hat{A}P=2\sqrt{5}\times\dfrac{2}{\sqrt{5}}=4$)

(5) Basta ter em consideração a interpretação geométrica dos conce itos de taxa de variação e de taxa média de variação.