Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Global de Matemática

11.º Ano **RESERVA** **Junho/99**

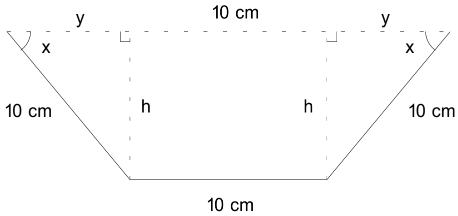
Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**D**	**A**	**C**	**D**	**B**
Questão	*2*	*4*	*5*	*1*	*3*
Prova 2	**H**	**G**	**F**	**G**	**H**

2.ª Parte

1.



a) Tendo em consideração os elementos da figura ao lado, temos $\cos x = \dfrac{y}{10}$ e $\operatorname{sen} x = \dfrac{h}{10}$, donde $y = 10.\cos x$ e $h = 10.\operatorname{sen} x$.

Tendo em conta a fórmula da área de um trapézio, vem

$A(x) = \dfrac{(20.\cos x + 10) + 10}{2} \times 10.\operatorname{sen} x = (10.\cos x + 10) \times 10.\operatorname{sen} x = 100.\operatorname{sen} x.(\cos x + 1)$

, para $0° < x \leq 90°$.

b) Como $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, sabendo que $tg\, x = \dfrac{1}{2}$ e que $0° < x \leq 90°$, temos:

$\cos x = +\dfrac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{2})^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ e (pela F.F.T.), portanto, $\operatorname{sen} x = +\sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{5}})^2} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Assim, nessa circunstância, a área da secção da caleira será:

$A = 100 \times \dfrac{\sqrt{5}}{5} \times (\dfrac{2\sqrt{5}}{5} + 1) = 20\sqrt{5} \times \dfrac{2\sqrt{5}+5}{5} = 4 \times 2 \times 5 + 20\sqrt{5} = 40 + 20\sqrt{5}$ metros quadrados.

2.

a) $d(\frac{3}{4}) = \dfrac{8 \times \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}}{\frac{9}{16}+1} = \dfrac{8 \times (-1)}{\frac{25}{16}} = -\dfrac{128}{25} = -5{,}12$.

Setenta e cinco centésimas de segundo após o salto, a extremidade solta da prancha encontra-se 5,12 cm abaixo da sua posição de equilíbrio.

b) Comecemos por determinar a expressão geral das soluções da equação $d(t) = 0$.

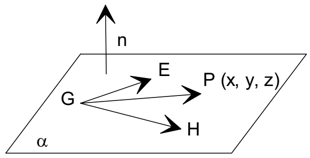
$$\begin{aligned}\frac{8.\operatorname{sen}(2\pi.t)}{t^2+1} = 0 &\Leftrightarrow 8.\operatorname{sen}(2\pi.t) = 0 \quad \wedge \quad t^2 + 1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow \operatorname{sen}(2\pi.t) = 0 \\ &\Leftrightarrow 2\pi.t = k\pi, \quad k \in Z \\ &\Leftrightarrow t = \frac{k}{2}, \quad k \in Z\end{aligned}$$

As soluções que pretendemos pertencem ao intervalo $]1, 3[$.
Logo, esses instantes foram 1,5 s, 2 s e 2,5 s após o salto.

3.

a) Como G (4, 4, 4), E (0, 0, 4) e H (4, 0, 2), então são vectores do plano *EGH* os vectores $\overrightarrow{GE} = (-4,-4,0)$ e $\overrightarrow{GH} = (0,-4,-2)$.

Designado por $\vec{n}_\alpha = (a,b,c)$ um vector genérico normal ao plano *EGH* (α), será:



$$\begin{cases}(a,b,c).(-4,-4,0)=0\\ (a,b,c).(0,-4,-2)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4a-4b=0\\ -4b-2c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-b\\ c=-2b\end{cases}$$

Assim, $\vec{n} = (1,-1,2)$ (por exemplo, para $b=-1$) é um vector normal ao plano *EGH*.

Designado *P* (x, y, z) um ponto genérico do plano, os vectores $\overrightarrow{GP}$ e $\vec{n}$ são perpendiculares, logo:
$(x-4, y-4, z-4).(1,-1,2)=0 \Leftrightarrow x-4-y+4+2z-8=0 \Leftrightarrow x-y+2z=8$.

Portanto, $x-y+2z=8$ é uma equação cartesiana do plano *EGH*.

b) Como $z=0$ é uma equação do plano *xOy*, então $\begin{cases}x-y+2z=8\\ z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+8\\ z=0\end{cases}$ define de forma cartesiana a recta pretendida. Portanto, são pontos dessa recta *P* (0, -8, 0) e *Q* (8, 0, 0).

Assim, $(x,y,z)=(8,0,0)+k(8,8,0),\ k\in IR$ é uma equação vectorial da recta pedida.

c) $V = V_{cubo} - V_{[FGHE]} = 4^3 - \frac{1}{3}\times\frac{\overline{FH}\times\overline{FG}}{2}\times\overline{FE} = 64-\frac{1}{6}\times 2\times 4\times 4 = 64-\frac{16}{3} = \frac{176}{3} \approx 58{,}7$ unidades de volume.

4.

a)

$$d(t)\le 15 \Leftrightarrow 2t+\frac{8}{t+1}-15\le 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2+2t+8-15t-15}{t+1}\le 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2-13t-7}{t+1}\le 0$$

$$2t^2-13t-7=0 \Leftrightarrow t=\frac{13\mp\sqrt{169+56}}{4} \Leftrightarrow t=\frac{13\mp 15}{4} \Leftrightarrow t=7 \ \vee\ t=-0{,}5$$

Como a função apenas está definida em IR_0^+ e tendo em consideração o sinal da função quadrática, vem:

t	0		7	$+\infty$
$2t^2-13t-7$	-	-	0	+
$t+1$	+	+	+	+
$\frac{2t^2-13t-7}{t+1}$	-	-	0	+

Portanto, o objecto distou do ponto de referência 15 cm ou menos durante os primeiros 7 segundos.

b) Ora, $d'(t) = 2-\frac{8}{(t+1)^2} = \frac{2.(t+1)^2-8}{(t+1)^2}$.

Tendo em consideração que $(t+1)^2>0, \forall t\in IR$, então

$d'(t)=0 \Leftrightarrow (t+1)^2=4 \Leftrightarrow t+1=2 \ \vee\ t+1=-2 \Leftrightarrow t=1 \ \vee\ t=-3$.

No momento em que foi iniciada a observação, o objecto encontra-se a 8 cm do ponto de referência. Esta distância foi diminuindo durante o primeiro segundo de observação, apresentando então o seu valor mínimo: 6 cm.
A partir desse momento, a distância do objecto ao ponto fixo vai aumentando indefinidamente.

t	0		1	$+\infty$
$d'(t)$	-	-	0	+
$d(t)$	8	↘	6	↗
	Máx		Mín	

5.

a)

$$f(x) = h(x) \Leftrightarrow -2+\sqrt{9-x} = x-5$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{9-x} = x-3 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 9-x = x^2-6x+9 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-5x=0$$
$$\Leftrightarrow x.(x-5)=0$$
$$\Leftrightarrow x=0 \quad \vee \quad x=5$$

Verificação:

Para $x=0$, vem $-2+3=0-5$, que é uma proposição falsa.
Para $x=5$, vem $-2+2=5-5$, que é uma proposição verdadeira.

Portanto, a equação dada apenas tem uma solução: $x=5$.

b) $(f \circ h)(-1) = f(h(-1)) = f(-6) = -2+\sqrt{15}$.

Como $g(x) = \dfrac{3x-7}{x-1} = \dfrac{3.(x-1)-4}{x-1} == 3 - \dfrac{4}{x-1}$, então:

Quando $x \to \mp\infty$, então $g(x) \to 3$.

Logo, a recta de equação $y=3$ é uma assimptota horizontal do gráfico de g.

Quando $x \to 1^{\mp}$, então $g(x) \to \pm\infty$.

Logo, a recta de equação $x=1$ é uma assimptota vertical do gráfico de g.

c) $D_g = IR \setminus \{1\}$ e $D'_g = IR \setminus \{3\}$ (este último, do que sabemos do estudo da função do tipo $y = a + \dfrac{b}{x-c}$).

Sendo $y = \dfrac{3x-7}{x-1}$, então $y(x-1) = 3x-7 \Leftrightarrow x(y-3) = y-7$. Logo, $x = \dfrac{y-7}{y-3}$.

Assim,

$$g^{-1}: \; IR \setminus \{3\} \to IR \setminus \{1\}$$
$$x \to \frac{x-7}{x-3}$$

6.

$$u_n = \frac{4}{7} \Leftrightarrow \frac{1+n}{2n-1} = \frac{4}{7}$$
$$\Leftrightarrow 7+7n = 8n-4 \qquad (\text{pois } n \in \mathrm{IN})$$
$$\Leftrightarrow n = 11$$

Portanto, $\frac{4}{7}$ é o 11.º termo da sucessão.

Ora,

$$u_{n+1}-u_n = \frac{2+n}{2n+1} - \frac{1+n}{2n-1} = \frac{4n-2+2n^2-n-2n-1-2n^2-n}{(2n+1)(2n-1)} = \frac{-3}{(2n+1)(2n-1)} < 0, \ \forall n \in IN$$

Portanto, a sucessão é estritamente decrescente, pois $u_{n+1}-u_n < 0, \ \forall n \in IN$.

O Professor

---

(1) 1, 5, 9 e 13 são o número de quadrados de cada uma das figuras (valores que não são gerados por qualquer uma das 3 expressões dadas). A primeira figura tem 1 quadrado e a figura de ordem seguinte tem mais 4 quadrados do que a anterior. Estamos face a uma sucessão de termo geral $u_n = 1+4.(n-1) = 4n-3$.

(2) A função $\frac{f}{g}$ não está definida nos zeros de g, logo é falso "2 é um zero de $\frac{f}{g}$".

Também, $(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(2) = 0$. E ainda, "$f^{-1}(0)=1$" é falso, pois $f(1) = 2 \neq 0$.

(3) A primeira condição permite excluir a função cujo gráfico é uma parábola com a concavidade voltada para baixo. A segunda condição apenas é verificada por uma das funções, a injectiva. A terceira condição é verificada por qualquer uma das funções.

(4) $\vec{AB}.\vec{AQ} = \overline{AB} \times \overline{AQ} \times \cos B\hat{A}Q = \overline{AB} \times \overline{AQ} \times \operatorname{sen} D\hat{A}Q = \overline{AB} \times \overline{AQ} \times \dfrac{\overline{DQ}}{\overline{AQ}} = \overline{AB} \times \overline{DQ} = 2 \times 1 = 2$.

(5) A condição "$x=3 \ \wedge \ y=5 \ \wedge \ z=4$" define um ponto. A condição "$3x+5y+4z=0$" define um plano. Numa das equações vectorial de uma recta, estão trocados entre si as coordenadas do ponto Q e as coordenadas do vector $\vec{PQ}$.