Escola Secundária da Sé-Lamego

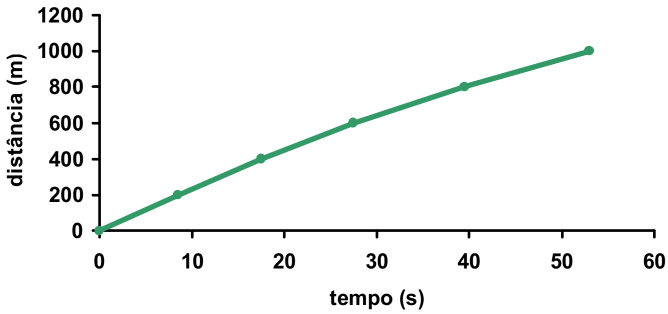
Ficha de Trabalho de Matemática

21/04/99 ***Taxa de variação de uma função. Derivada*** **11.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

1. A corrida

Numa corrida de 1000 metros em bicicleta, organizada na escola, o José Carlos fez os tempos indicados.



Distância em metros	*Tempo em segundos*
0	0
200	8,5
400	17,5
600	27,5
800	39,5
100	53

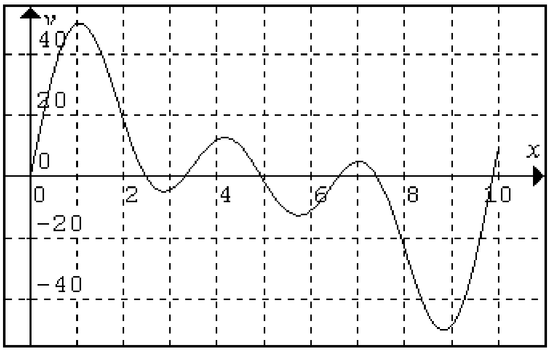
a) Qual foi a velocidade média no total do percurso?

b) Qual foi a velocidade média em cada um dos intervalos considerados?

c) Quando revelou o José Carlos sinais de cansaço?

2. Observe o gráfico

Indique:



a) um intervalo onde a taxa média de variação seja positiva.

b) um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa.

c) um intervalo onde a taxa média de variação seja nula.

d) um intervalo onde a taxa média de variação seja negativa e a função não seja monótona.

3. Verdadeiro ou falso?

Indique, justificando, o valor lógico das afirmações:

a) "Se $\frac{f(2)-f(1)}{2-1}<0$, então f é decrescente em $]1,2[$."

b) "Se $f'(0)=0$, então f tem um extremo em $x=0$."

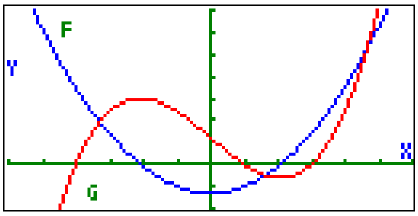
c) "Se $f'(x)>0,\ \forall x\in[0,+\infty[$ então f é crescente em $[0,+\infty[$."

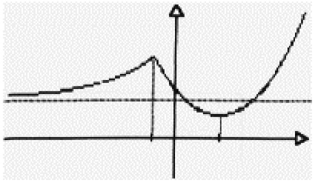
d) "Se $f(x)=|x|$, então f tem derivada nula em $x=0$."

e) "Se $f(x)=x^3$, então f tem um extremo em $x=0$."

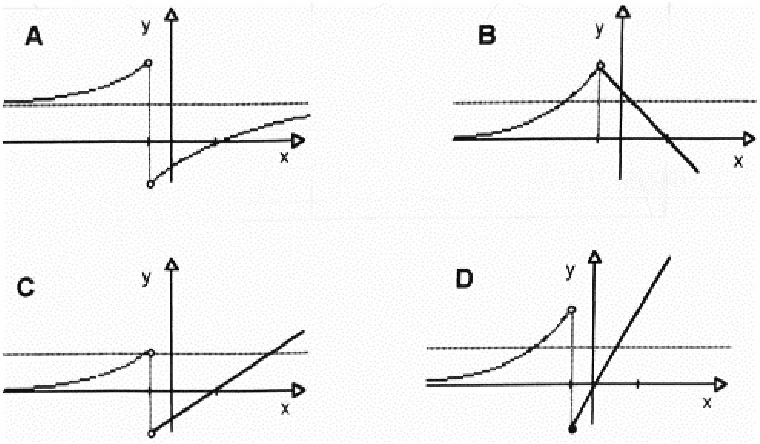
f) "Se f tem um extremo relativo, então f' tem um zero."

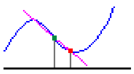
4. **Qual é qual?**
   Observe o gráfico.
   Estão representadas uma função e a sua derivada.
   Qual é o gráfico da função e qual é o gráfico da derivada? Justifique.



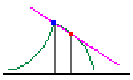


5. **Derivadas e gráficos**
   Aqui ao lado está o gráfico da função *h*.
   Um dos gráficos abaixo é o da derivada de *h*.
   Indique qual é ele, explicando claramente porquê, e porque é que os outros não servem.

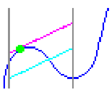




6. **http://www.ies.co.jp/math/java/limsec/limsec.html**
   Execute o *applet* "*Secant Line and Tangent Line*" no endereço indicado acima.
   Faça um comentário sobre a experiência que efectuou.



7. **http://www.ies.co.jp/math/java/limrl/limrl.html**
   Execute o *applet* "*One-sided derivative*" no endereço indicado acima.
   Faça um comentário sobre a experiência que efectuou.



8. **http://www.ies.co.jp/math/java/bib3ji/bib3ji.html**
   Execute o *applet* "*Derivatives of Cubic Functions*" no endereço indicado acima.
   Faça um comentário sobre a experiência que efectuou.

9. **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/tangent/tangent-j.html**
   Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.

10. **http://www.math.psu.edu/dna/calculus/secants/secants3/secants-j.html**
    Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.

11. **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/definition.9/**
    Resolva o problema proposto.
    Compare a sua resolução com a solução apresentada nessa página.

http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/

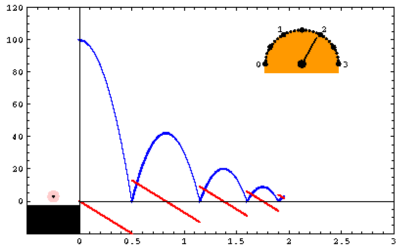
12. **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/definition.13/**
    Resolva o problema proposto.
    Compare a sua resolução com as soluções apresentadas nessa página.

Visual Calculus

Derivatives

13. **http://archives.math.utk.edu/visual.calculus/2/definition.7/**
    Resolva os problemas propostos seguintes: 1, 2, 3, 5 e 8.
    Compare a sua resolução com a solução apresentada nessa página.

14. http://www.math.psu.edu/dna/calculus/bounce/bounce2/bounce-j.html
Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.



15. http://www.math.psu.edu/dna/calculus/differential/differential-j.html
Veja a animação no endereço indicado acima e faça um comentário sobre a mesma.

16. O quadro
seguinte apresenta alguns valores e o sinal de *f'*, derivada da função *f*, real de domínio *IR*.

x	$-\infty$	2		4	$+\infty$
$f'(x)$	-1		+	0	-

O domínio de f' é $IR \setminus \{2\}$.
Defina graficamente duas funções distintas que tenham *f'* por derivada.

17. Considere a função: $y = \begin{cases} x^2 - 1 & \Leftarrow \quad x \le 0 \\ 2x - 1 & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$

a) Represente-a graficamente.

b) Descreva o gráfico da função, indicando nomeadamente o domínio, contradomínio, extremos e intervalos de monotonia.

c) Estude a existência de derivada no ponto de abcissa 0. Que conclusão tira?

d) Esboce o gráfico da função derivada de y.

18. Uma bola desce um plano inclinado.
A distância *d*, em centímetros, percorrida pela bola em função do tempo *t*, em segundos, é dada por $d = 2t^3 + 3t^2$, para $0 \le t \le 5$.

a) Represente graficamente a função *d* na situação descrita.

b) Determine a velocidade média da bola no 1.º segundo de movimento.

c) Qual será a velocidade da bola no instante $t = 3$ segundos?

d) Em que instante terá a bola uma velocidade de 36 cm/s?

e) Construa o gráfico da velocidade da bola em função do tempo.

19. Um projéctil é lançado verticalmente para cima com uma velocidade inicial de 120 m/s.
A sua distância ao solo, em metros, após *t* segundos é $d(t) = -4{,}9t^2 + 120t$.

a) Qual é a altura máxima que o projéctil atinge?

b) Em que instante chega ao solo?

c) Qual é a velocidade do projéctil em cada instante?

d) Com que velocidade chega ao solo?

e) A aceleração é a taxa de variação (instantânea) da velocidade. Qual é a aceleração do projéctil no instante *t*?

f) Compara os gráficos da *altura*, *velocidade* e *aceleração* do projéctil.

20. Rectângulos de área 50

Considere os rectângulos de área 50 cm^2. Seja P a função que a cada x (medida da base) faz corresponder o perímetro do rectângulo.

a) Mostre que $P(x) = 2x + \frac{100}{x}$, para $x > 0$.

b) Determine os valores de *x* para os quais o perímetro é inferior a 30 cm.

c) Mostre que $\frac{dP}{dx} = 2 - \frac{100}{x^2}$, para $x > 0$.

d) Determine os intervalos de monotonia de *P* e as dimensões do rectângulo que tem perímetro mínimo.

21. A evolução da temperatura do ar em Lamego entre as 0 e as 24 horas do dia 1 de Janeiro foi dada pela função $T(h) = 20 + h + \frac{500}{h-35}$, com *T* em graus centígrados e *h* em horas.

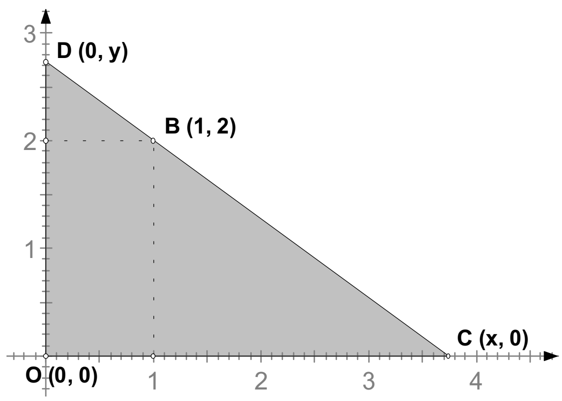
a) Determine a taxa de variação da temperatura às 0 horas do dia 1 de Janeiro.

b) Sabendo que $T'(h) = 1 - \frac{500}{(h-35)^2}$, determine os intervalos de monotonia de *T* e o instante (com aproximação ao minuto) em que foi máxima a temperatura do ar nesse dia.

c) Escreva a equação reduzida da recta que é tangente ao gráfico de *T* no ponto de abcissa $h = 10$.

22. No referencial ortonormado da figura, considere:

- Seja B, um ponto de coordenadas (1, 2).
- A cada ponto C (*x*, 0) do eixo *Ox*, com $x > 1$, faz-se corresponder um ponto D (0, *y*) do eixo *Oy*, de modo que B, C e D sejam colineares.



a) Mostre que:

a1) $y = \frac{2x}{x-1}$ exprime *y* em função de *x* (para $x > 1$).

a2) A área $A(x)$ do triângulo [OCD] é dada por

$$A(x) = \frac{x^2}{x-1} \quad (x > 1).$$

b) Sabendo que $A'(x) = \frac{x.(x-2)}{(x-1)^2}$ (*A' designa a derivada de A*):

b1) Determine o maior intervalo onde *A* é crescente e o maior intervalo onde é decrescente.

b2) Determine, com aproximação às centésimas, o perímetro do triângulo [OCD] que tem área mínima.

23. O custo marginal

A taxa de variação do custo relativamente ao número de unidades produzidas chama-se custo marginal.

Um fabricante de pequenos motores estima que o custo da produção de *x* motores por dia é dado por $C(x) = 100 + 60x + \frac{50}{x}$ (em contos).

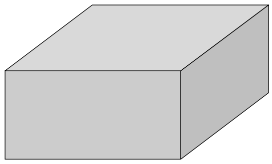
N.º de motores	*Custo*	*Custo médio*	*Custo marginal*
x	$C(x)$	$\frac{C(x)}{x}$	$C'(x)$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

Custo do motor	
$C(x) - C(x-1)$	
2.º	
3.º	
4.º	
5.º	
6.º	

a) Compare o custo marginal da produção de 5 motores com o custo da produção do 6.º motor.

b) Complete a tabela ao lado.

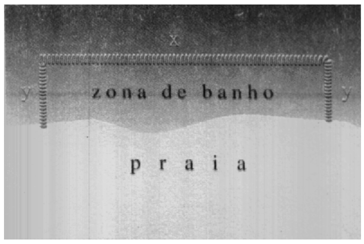
24. Uma caixa
com a forma de um paralelepípedo de base quadrada de lado x cm tem uma área total de 150 cm^2.



a) Mostre que o volume do paralelepípedo é dado pela expressão $V(x) = \dfrac{75x - x^3}{2}$.

b) Determine as dimensões da caixa, sabendo que ela apresenta o volume máximo para a área total indicada.

25. Na praia
Pretende-se vedar com uma fita de flutuadores uma zona rectangular com 200 metros quadrados de área, para banho das crianças, como mostra a figura.



Se cada metro da fita de flutuadores custar 2.000\$00, qual deverá ser o valor de x e de y para que o gasto na compra seja mínimo?

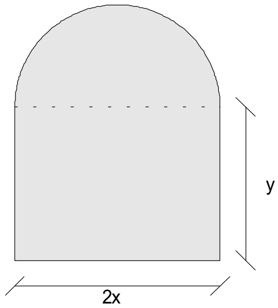
26. Um agricultor
dispõe de 20.000\$00 para construir uma vedação com forma rectangular.
A vedação deve ser feita do seguinte modo:

- Um dos lados em muro de tijolo
- Nos três lados restantes, com rede

Cada metro de rede custa 200\$00 e cada metro de muro de tijolo fica em 600\$00.

Qual é a área máxima que o agricultor consegue vedar nestas condições?

27. Uma janela
é formada por um rectângulo e por um semicírculo, conforme indicado na figura.
O perímetro da janela deve ser igual a 5 metros.



Pretende-se encontrar as dimensões da janela a fim de que a abertura tenha uma área máxima

a) Exprima o perímetro da janela em função de x e de y.

b) Retire da expressão anterior o valor de y em função de x.

c) Para que valores de x se tem $y > 0$?

d) Utilizando os resultados anteriores, mostre que a área se pode escrever na forma $a(x) = 5x - \dfrac{4+\pi}{2}x^2$.

e) Determine para que valores de x e de y a área da janela é máxima.

SOLUÇÕES

1.

a) 18,87 m/s.

b) 23,53 m/s; 22,22 m/s; 20 m/s; 16,67 m/s e 14,81 m/s.

c) De forma significativa, a partir dos 600 metros.

2. Por exemplo:

a) [0, 2].

b) [3, 6].

c) [0, 5].

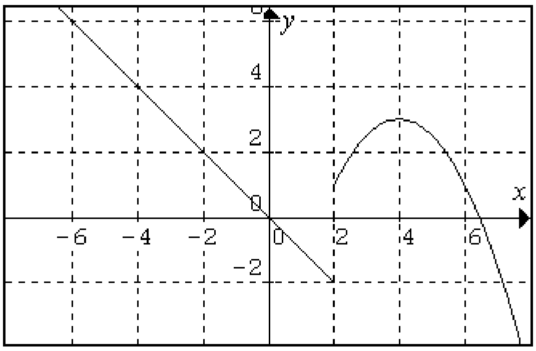
d) [5, 6].

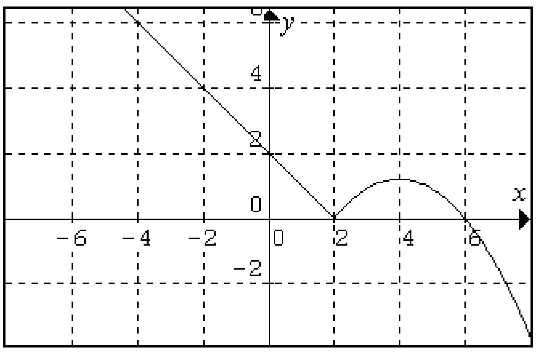
3. São todas falsas, excepto a da alínea c). (Porquê?)

4. $F(x) = G'(x)$ (Porquê?)

5. C (Porquê?)

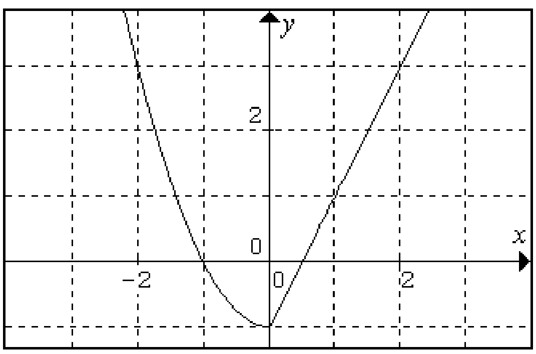
16. Por exemplo:





17.

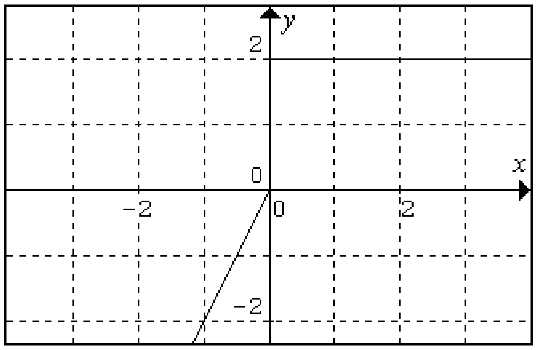
a)



b) $D_y = IR$; $D'_y = [-1, +\infty[$; -1 é um mínimo absoluto; é estritamente decrescente em IR^- e estritamente crescente em IR^+ .

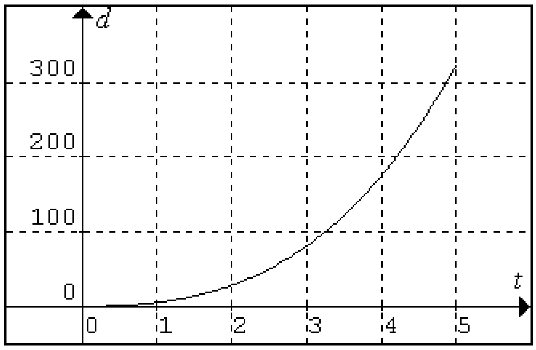
c) Não existe derivada no ponto de abcissa 0, pois $y'(0^-) = 0$ e $y'(0^+) = 2$.

d)



18.

a)

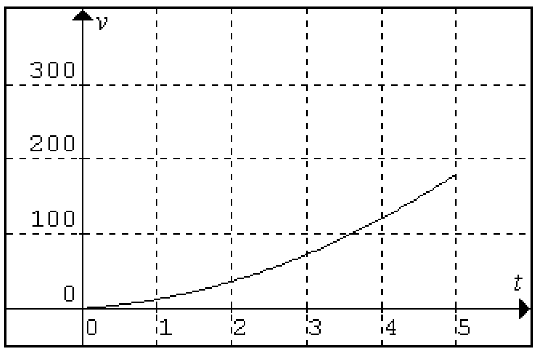


b) 5 cm/s.

c) 72 cm/s.

d) No instante $t = 2$ segundos.

e)



19.

a) 735 metros, aproximadamente.

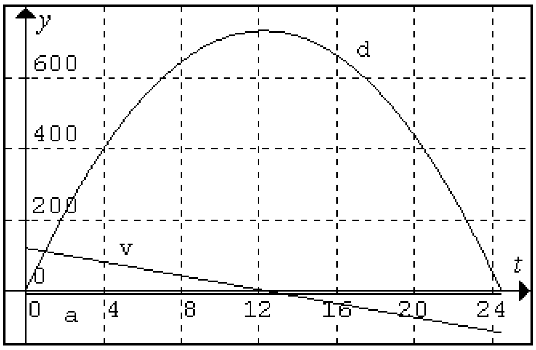
b) Decorridos 24,5 segundos, aproximadamente.

c) No instante *t* a velocidade é , em metros por segundo, dada por $v(t) = d'(t) = -9{,}8t + 120$.

d) 120 m/s (-120 m/s).

e) No instante *t* a aceleração é , em m/s^2, dada por $a(t) = v'(t) = d''(t) = -9{,}8$.

f)



20.

b) O perímetro é inferior a 30 cm para valores de $x \in \left]5,10\right[$, em centímetros.

d) P é decrescente em $\left]0,5\sqrt{2}\right[$ e crescente em $\left]5\sqrt{2},+\infty\right[$; $x = 5\sqrt{2}$ é um minimizante.
O rectângulo que tem perímetro mínimo é um quadrado de lado $5\sqrt{2}$ cm.

21.

a) Às 0 horas do dia 1 de Janeiro, a taxa de variação da temperatura foi de 0,59 ºC/h, aproximadamente.

b) $T'(h) = 1 - \dfrac{500}{(h-35)^2} = \dfrac{(h-35)^2 - 500}{(h-35)^2}$ e $(h-35)^2 - 500 = 0 \Leftrightarrow (h-35)^2 = 500 \Leftrightarrow h = 35 \pm 10\sqrt{5}$

x	0		$35-10\sqrt{5}$		24
$(h-35)^2-500$	+	+	0	-	-
$(h-35)^2$	+	+	+	+	+
$T'(h)$	+	+	0	-	-
$T(h)$	$20-\dfrac{500}{35}$	↗	$55-20\sqrt{5}$	↘	$44-\dfrac{500}{11}$
	Mín		Máx		Mín

T é estritamente crescente no intervalo $\left[0,35-10\sqrt{5}\right[$ e estritamente decrescente no intervalo $\left]35-10\sqrt{5},24\right]$.
A temperatura máxima nesse dia ocorreu aproximadamente às 12h 38m.

c) O ponto de tangência tem coordenadas $P(10,10)$ e a recta tem declive $m = T'(10) = 0{,}2$.
Portanto, uma equação da recta tangente ao gráfico nesse ponto é da forma $T = 0{,}2h + b$, donde $10 = 0{,}2 \times 10 + b \Leftrightarrow b = 8$.
Logo a equação pedida é $T = 0{,}2h + 8$.

22.

a1) Tenha em consideração a semelhança de triângulos.

a2) $A_{[OCD]} = \dfrac{\overline{OC} \times \overline{OD}}{2} = \dfrac{x \times \dfrac{2x}{x-1}}{2} = \dfrac{x^2}{x-1} = A(x)$, para $x > 1$.

b1)

x	1		2	$+\infty$
$x(x-2)$		-	0	+
$(x-1)^2$		+	+	+
$A'(x)$		-	0	+
$A(x)$		↘	4	↗
			Máx	

A função é decrescente em $\left]1,2\right]$ e crescente em $\left[2,+\infty\right[$.

b2) Concluímos na alínea anterior que a área é mínima para $x = 2$.
Logo, o triângulo de área mínima tem de perímetro $P = 2 + \dfrac{2 \times 2}{2-1} + \sqrt{2^2 + 4^2} = 6 + 2\sqrt{5} = 10{,}47$ (2 c.d.).

23.

a) $C'(x) = 60 - \frac{50}{x^2}$; $C'(5) = 58$;

$C(6.º) = C(6) - C(5) = 58{,}33$ (2 c.d.).

b)

N.º de motores	Custo	Custo médio	Custo marginal
x	$C(x)$	$\frac{C(x)}{x}$	$C'(x)$
1	210,00	210,00	10,00
2	245,00	122,50	47,50
3	296,67	98,89	54,44
4	352,50	88,13	56,88
5	410,00	82,00	58,00
6	468,33	78,06	58,61

Custo do motor	
$C(x) - C(x-1)$	
2.º	35,00
3.º	51,67
4.º	55,83
5.º	57,50
6.º	58,33
7.º	58,81

24.

b) $V'(x) = \frac{75 - 3x^2}{2}$

$5cm \times 5cm \times 5cm$.

25. $P(x) = x + \frac{400}{x}$; $P'(x) = 1 - \frac{400}{x^2}$;

O gasto mínimo é de 80 contos, para $x = 20$ e $y = 10$ metros.

26. $600x + 200.(x + 2y) = 20000$;

$A(x) = 50x - 2x^2$; $A'(x) = 50 - 4x$

$x = 12{,}5$ e $y = 25$

Consegue vedar uma área máxima de 312,5 m^2.

27.

a) $P = (2 + \pi)x + 2y$

b) $y = \frac{P - (2 + \pi)x}{2}$

c) Como $P = 5$, então $x < \frac{5}{2 + \pi}$ ($x > 0$).

e) $x = y = \frac{5}{4 + \pi}$

O Professor