Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

04/01/99 *Geometria Analítica no Espaço* **11.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

1. A região do espaço definida, num referencial ortonormado, por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \wedge \ z = -\frac{1}{2}$ é:

[A] a circunferência de centro (0, 0, $-\frac{1}{2}$) e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[B] o círculo de centro (0, 0, 0) e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[C] a circunferência de centro (0, 0, $-\frac{1}{2}$) e raio 1.

[D] o círculo de centro (0, 0, $-\frac{1}{2}$) e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Pelos pontos A (1, -2, 1), B (3, -1, 2), C (-1, -3, 0) passa (ou passam):

[A] um e um só plano.
[B] uma infinidade de planos.
[C] três e só três planos.
[D] nenhum plano.

3. Num referencial ortonormado Oxyz, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha\text{: } x - y + z + \frac{1}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \beta\text{: } 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

Os planos α e β são:

[A] coincidentes.
[B] estritamente paralelos.
[C] concorrentes não perpendiculares.
[D] perpendiculares.

4. Indique qual dos pares de equações seguintes define, num referencial ortonormado Oxyz, um par de planos perpendiculares.

[A] $x + y = 3$ e $x + y = 0$
[B] $-x + y - z = 1$ e $3x + 2y + 2z = 2$.
[C] $x = y$ e $z = 0$.
[D] $2x + 2y + z = 9$ e $x - 3z = 0$.

5. Num referencial ortonormado Oxyz, a intersecção das superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9 \quad \text{é}$$

[A] Um ponto.
[B] Uma superfície esférica.
[C] Uma circunferência.
[D] O conjunto vazio.

6. Dois planos α e β são estritamente paralelos. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

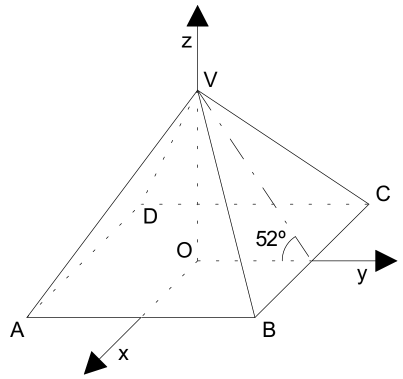
[A] Qualquer recta contida em α é paralela a qualquer recta contida em β.

[B] Há rectas contidas em α que intersectam β.

[C] Há rectas perpendiculares a α que não são perpendiculares a β.

[D] Dada uma recta contida em α, existem em β infinitas rectas que lhe são paralelas.

7. Na pirâmide de Keops, quadrangular regular, a aresta da base tem 23 dam de comprimento e o ângulo que cada face forma com a base é de 52º.
Sejam A, B, C e D os vértices da base e V o vértice da pirâmide.
Considere o referencial ortonormado em que a unidade considerada é 10 metros e indique:



a) As coordenadas do vértice V da pirâmide (utilize uma aproximação a menos de 0,1).

b) Uma equação cartesiana do plano perpendicular a VB e que contém o vértice D.

c) Uma equação vectorial da recta paralela a VC e que contém o ponto (2, -1, 0).

d) Considere a família dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{CA}$ que têm origem em A e norma igual a 2. Que lugar geométrico definem os pontos extremidade destes vectores?
Caracterize-o por uma condição em x, y, z.

8. Considere, num referencial ortonormado (O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$), o vector $\vec{u} = (2{,}5{,}0)$.

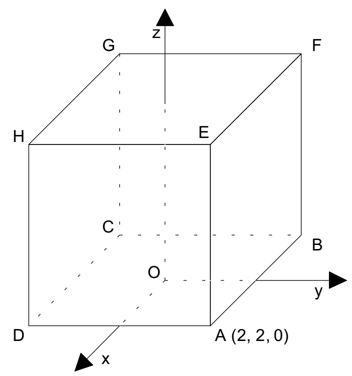
a) Indique, justificando, dois vectores que sejam perpendiculares a $\vec{u}$ mas que não sejam colineares.

b) Qual o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{e}_1$? (Aproximação a menos de 0,01 radianos.)

c) Escreva uma equação cartesiana do plano α perpendicular a $\vec{u}$ e que intersecta o eixo Oy no ponto (0, 1, 0).

d) Considere os planos, β: $x + y + z = 1$, γ: $3y - 2z = 1$.
Indique, justificando, qual a posição relativa dos planos α, β e γ.

9. No referencial ortonormado Oxyz está representado um cubo de faces paralelas aos planos coordenados. O perímetro de cada face é, na unidade considerada, igual a 16.



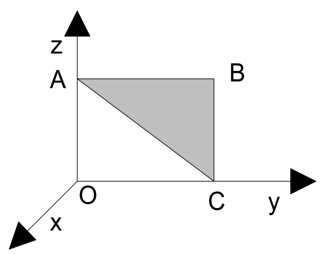
a) Escreva uma equação cartesiana do plano que contém os pontos D, G e F.

b) Defina analiticamente a superfície esférica tangente a todas as faces do cubo.

c) Determine k, caso exista, de modo que o vector $\vec{u} = (k^2 + 2k, k^2 - 1, 3)$ seja colinear com $\overrightarrow{CH}$.

d) Sendo M e N os pontos médios das arestas [AB] e [EF], respectivamente, determine as coordenadas do ponto P$\in$[HE] sabendo que a secção plana determinada no cubo pelo plano MNP é um quadrado.

10. No referencial ortonormado Oxyz, [ABC] é um triângulo rectângulo em B contido no plano yoz.
Na unidade considerada, $\overline{OC} = 4$ e $\overline{OB} = 5$.



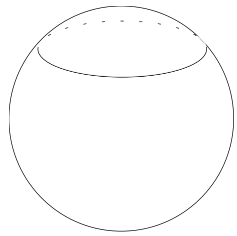
a) Defina por equações cartesianas a recta AC.

b) Considere que o triângulo [ABC] roda uma volta completa em torno do eixo Oy.

b1) Defina analiticamente a linha que o ponto A descreve no plano xOz na referida rotação.

b2) Calcule o volume do sólido gerado pelo triângulo [ABC] na rotação descrita.

11. A embalagem de um certo gelado é uma superfície esférica.
Num referencial ortonormado essa superfície tem por equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 13$.



a) O bordo da "tampa" da embalagem é uma circunferência que se obtém seccionando a superfície esférica por um plano β, de cota positiva e paralelo a xOy.
Sabendo que, na unidade considerada, o bordo da "tampa" tem perímetro igual a 2π , escreva uma equação do plano β.

b) Verifique que o ponto A (2, 3, 0) pertence à superfície esférica e determine as coordenadas do ponto B, de modo que [AB] seja diâmetro da superfície esférica.

c) Seja α o plano mediador (perpendicular no ponto médio) do segmento [AB].
Determine $k \in IR$ de modo que α seja perpendicular ao plano definido por $ky - 2x = z$.

d) Defina analiticamente o segmento de recta [OA].

12. Seja α o plano de equação $5x + y = 3z + 3$.

a) Defina por uma condição vectorial a recta perpendicular a α e que passa pelo ponto de intersecção de α com o eixo Oy.

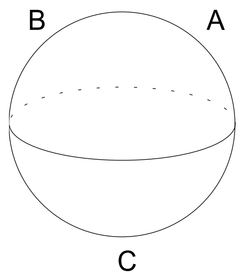
b) Para cada número real k a equação $kx + (3 - 5k)y + z = 0$ representa um plano π_k .

b1) Mostre que qualquer que seja k , π_k e α são perpendiculares.

b2) Diga, justificando, se existe $k \in IR$ tal que π_k seja plano mediador do segmento [OA], sendo O a origem do referencial e A (1, -2, 1).

13. Considere, num referencial ortonormado Oxyz, a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 .$$



- A superfície esférica está representada na figura junta.
- Os pontos A, B e C são pontos dessa superfície.
- O ponto A tem coordenadas (0, 4, 3).
- O ponto B tem coordenadas (0, -4, 3).
- O ponto C é um ponto de cota negativa do eixo Oz.

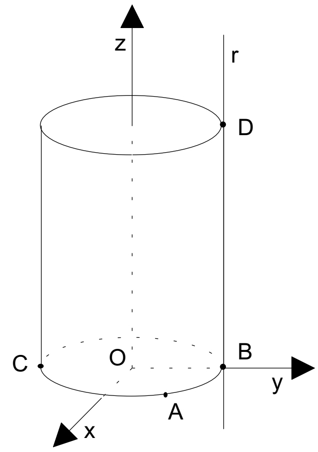
a) Considere todos os triângulos cujos vértices são pontos de intersecção desta superfície esférica com os eixos do referencial.
Escolhido um desses triângulos ao acaso, determine a probabilidade de estar contido no plano definido por $z = 0$. Indique o resultado em forma de percentagem.

b) Mostre que uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A é $4y + 3z = 25$.
(Note que um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio no ponto de tangência.)

c) Justifique que C tem coordenadas (0, 0, -5) e determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano referido na alínea anterior com a recta BC.

d) Calcule $tg\,(A\hat{C}B)$.

14. Considere, num referencial o. n. Oxyz, um cilindro de revolução como o representado na figura junta.



- A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano xOy.
- [BC] é um diâmetro da base inferior, contido no eixo Oy. O ponto C tem coordenadas (0, -5, 0).
- O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas (4, 3, 0).
- A recta r passa no ponto B e é paralela ao eixo Oz.
- O ponto D pertence à recta r e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

a) Justifique que a recta AC é perpendicular à recta AB.

b) Escreva uma equação vectorial da recta r.

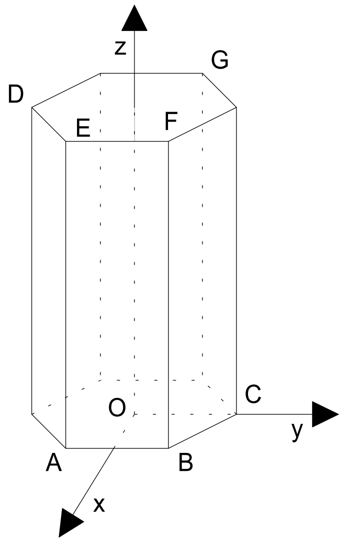
c) Justifique que $\overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano ABD.
Determine uma equação deste plano.

d) Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BOD, mostre que o volume do cilindro é dado por

$V(\alpha) = 125\pi tg\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(Determine $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} V(\alpha)$ e interprete o resultado obtido.)

15. Considere o prisma hexagonal regular representado num referencial o. n. Oxyz.
Sabe-se que:



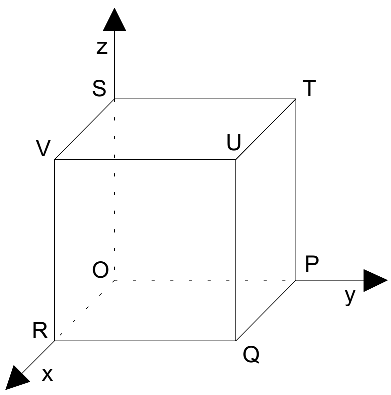
- os pontos A, B e C pertencem à base inferior do prisma, a qual está contida no plano xoy e tem por centro a origem do referencial;
- os pontos D, E, F e G pertencem à base superior do prisma, a qual está contida no plano de equação $z = 12$;
- o ponto C tem coordenadas (0, 4, 0).

a) Mostre que o ponto B tem coordenadas ($\sqrt{12}$, 2, 0) e aproveite este resultado para justificar que o ponto G tem coordenadas ($-\sqrt{12}$, 2, 12).

b) Mostre que a recta DG pode ser definida pela condição
$\sqrt{3}x + y = -4 \quad \wedge \quad z = 12$.

c) Determine a intersecção da recta DG com o plano que contém a face [ABFE] do prisma.

16. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. Oxyz.



- O vértice O coincide com a origem do referencial.
- O vértice R pertence ao semieixo positivo Ox.
- O vértice P pertence ao semieixo positivo Oy.
- O vértice S pertence ao semieixo positivo Oz.
- A abcissa de R é 2.

a) Determine uma equação cartesiana do plano PUV.

b) Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

c) Calcule a área da região do plano PUV compreendida entre a secção determinada por esse plano, no cubo, e a secção determinada pelo mesmo plano, na superfície esférica referida na alínea anterior.

SOLUÇÕES

1. D

2. B

3. C

4. C

5. D

6. D

7.

a) V (0; 0; 14,7).

b) $x + y - tg52^{\circ}.z + 23 = 0$.

c) $(x, y, z) = (2,-1,0) + k(-11,5;11,5;-14,7),\ k \in IR$.

d) O lugar geométrico é a circunferência de raio 2 unidades, centrada em A, assente sobre o plano de equação $x - y - 23 = 0$.
Uma condição é:
$(x - 11,5)^2 + (y + 11,5)^2 + z^2 = 4 \quad \wedge \quad x - y - 23 = 0$

8.

a) $\vec{v} = (0,0,1)$ e $\vec{w} = (-5,2,0)$ (p.e.), pois $\vec{v}\vec{u} = \vec{w}\vec{u} = 0$.

b) 1,19 rad.

c) $2x + 5y - 5 = 0$.

d) O sistema é impossível e, portanto, os três planos não se intersectam. Os planos intersectam-se dois a dois segundo rectas paralelas.

9.

a) $x + z = 2$.

b) $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

c) $k = 1$.

d) P (2, 2- $2\sqrt{3}$, 4).

10.

a) $x = 0 \quad \wedge \quad 3y + 4z - 12 = 0$.

b) $x^2 + z^2 = 9 \quad \wedge \quad y = 0$.

c) 24π.

11.

a) $z = 2\sqrt{3}$.

b) B (-2, -3, 0).

c) $k = \frac{4}{3}$.

d) $3x = 2y \quad \wedge \quad z = 0 \quad \wedge \quad 0 \leq x \leq 2$.

12.

a) $(x, y, z) = (0,3,0) + k(5,1,-3),\ k \in IR$.

b) Não existe nenhum $k \in IR$ que verifique a condição.

13.

c) 20%.

d)

e) (0, -20, 35).

f) $+\frac{4}{3}$.

14.

a)

b) $(x, y, z) = (0,5,0) + k(0,0,1),\ k \in IR$.

c) $x + 2y - 10 = 0$.

d) ($+\infty$.)

15.

a)

b)

c) ($2\sqrt{3}$, -10, 12).

16.

a) $x - z = 0$.

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

c) $3\pi - 4\sqrt{2}$.

O Professor