Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

04/01/99 ***Intersecção de planos. Resolução de sistemas*** **11.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

1. Qual a intersecção dos planos α: $2x - 3y + z = 2$ e β: $x - 2y - z = 1$?

2. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha:\ x + 2y - z + 6 = 0\ ;\ \beta:\ 3x + y + z = 4\ \text{ e }\ \gamma:\ x - 3y - 2z = 1\,.$$

3. Qual a intersecção do plano α: $2x + y - z = 3$ com o plano β: $4x + 2y - 2z = 10$?

4. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha:\ x + y + z - 6 = 0\ ;\ \beta:\ 2x - y + 1 = 0\ \text{ e }\ \gamma:\ 3x + z - 2 = 0\,.$$

5. Investigue se há pontos comuns aos três planos dados pelas seguintes equações:

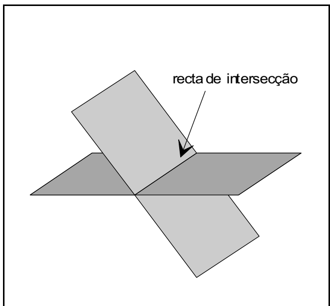
$$\alpha:\ x + 2y - 3z = -6\ ;\ \beta:\ 2x - y - z = 3\ \text{ e }\ \gamma:\ x + y - 2z = -3\,.$$

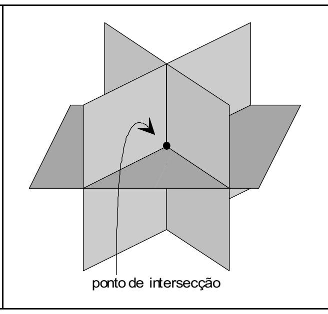
6. Qual a intersecção dos planos α: $2x + y - z = 3$; β: $4x + 2y - 2z = 10$ e γ: $6x + 3y - 3z = 0$

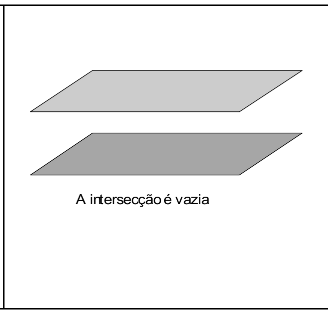
7. Qual a intersecção dos planos α: $2x + y - z = 3$; β: $4x + 2y - 2z = 10$ e γ: $x + y - z = 1$

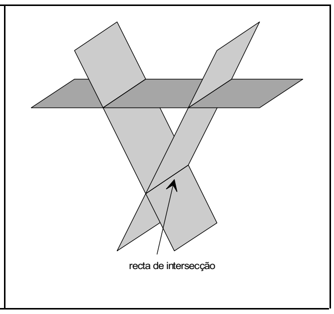
8. Qual a intersecção dos planos:

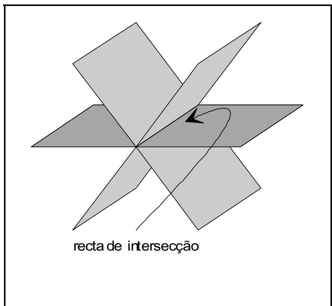
$$\alpha:\ 2x - 3y + z = 2\ ;\ \beta:\ x - 2y - z = 1\ \text{ e }\ \gamma:\ 2x - 4y - 2z = 2\ ?$$

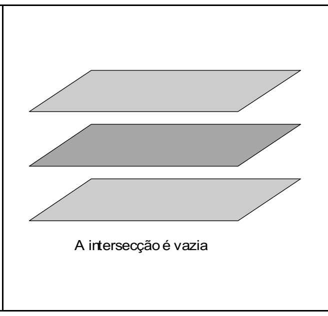


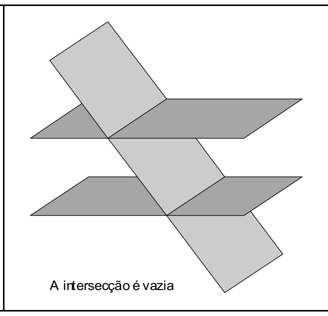


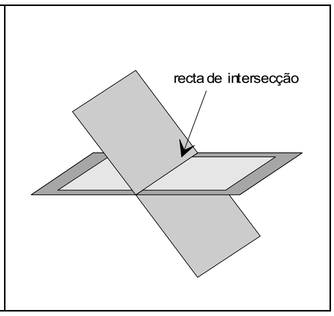












1. Qual a intersecção dos planos α: $2x-3y+z=2$ e β: $x-2y-z=1$?

Resolução

Essa intersecção é o conjunto dos pontos cujas coordenadas satisfazem as equações do sistema $\begin{cases}2x-3y+z=2\\x-2y-z=1\end{cases}$.

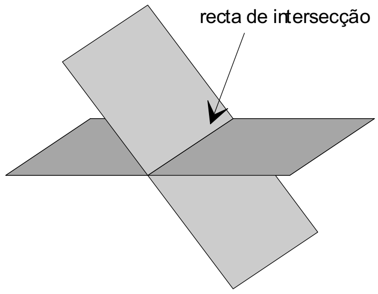
Estes planos não são paralelos (os vectores normais, $\vec{n}_\alpha=(2,-3,1)$ e $\vec{n}_\beta=(1,-2,-1)$ não são paralelos), logo a sua intersecção é uma recta.

Resolvendo o sistema em ordem a x e a y, vem

$$\begin{cases}2x-3y+z=2\\x-2y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\times(2y+z+1)-3y+z=2\\x-2y-z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=-3z\\x=-5z+1\end{cases}$$

ou seja, $\frac{x-1}{-5}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{1}$, que são equações cartesianas da recta de intersecção.

Essa recta passa no ponto (1, 0, 0) e é paralela ao vector $\vec{v}=(-5,-3,1)$.



Há infinitos ternos ordenados (x, y, z) que verificam o sistema (qualquer ponto da recta de intersecção verifica o sistema) por isso diz-se que o sistema é **indeterminado**.

2. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

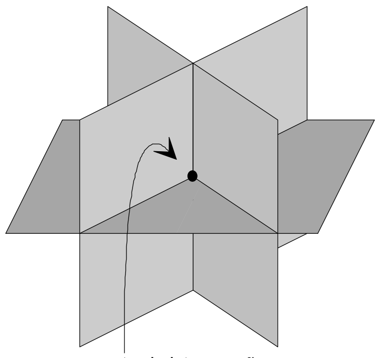
α: $x+2y-z+6=0$; β: $3x+y+z=4$ e γ: $x-3y-2z=1$.

Resolução

O ponto pedido é a solução do sistema de equações $\begin{cases}x+2y-z=-6\\3x+y+z=4\\x-3y-2z=1\end{cases}$.

Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases}x+2y-z=-6\\3x+y+z=4\\x-3y-2z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5y+z=-7\\10y+7z=1\\x-3y-2z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5z=15\\10y+7z=1\\x-3y-2z=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}z=3\\y=-2\\x=1\end{cases}.$$



Os três planos intersectam-se no ponto J (1, -2, 3).

Obtém-se um , e um só terno ordenado de valores reais que verifica o sistema. Diz-se então que o sistema é **possível** e **determinado**.

3. Qual a intersecção do plano α: $2x+y-z=3$ com o plano β: $4x+2y-2z=10$?

Resolução

O sistema $\begin{cases}2x+y-z=3\\4x+2y-2z=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+y-z=3\\2x+y-z=6\end{cases}$ não tem soluções.

A intersecção é vazia

Os vectores normais $\vec{n}_\alpha=(2,1,-1)$ e $\vec{n}_\beta=(4,2,-2)$ são paralelos, logo também são paralelos os planos e são conjuntos disjuntos. A intersecção é vazia. Este sistema é **impossível**.

4. Determine a intersecção dos planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha\text{: } x + y + z - 6 = 0 \ ; \ \beta\text{: } 2x - y + 1 = 0 \ \text{ e } \ \gamma\text{: } 3x + z - 2 = 0 \,.$$

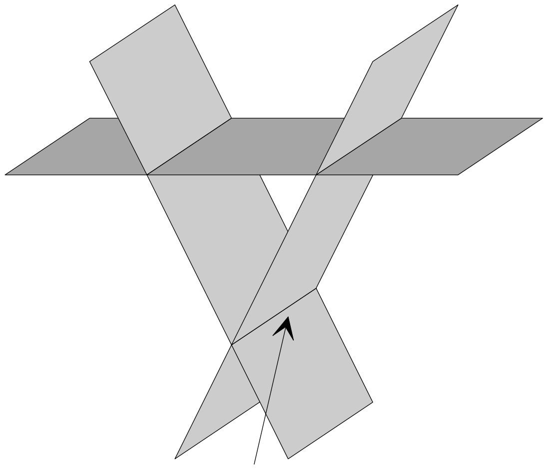
Resolução

Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 2x-y=-1 \\ 3x+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=6 \\ y=2x+1 \\ z=2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2x+1+2-3x=6 \\ y=2x+1 \\ z=2-3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x=3 \\ y=2x+1 \\ z=2-3x \end{cases}$$

Logo, o sistema é **impossível**.

É de reparar que a intersecção dos dois últimos planos é a recta $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-3}$ que é paralela ao plano α: $x + y + z - 6 = 0$, visto que $(2, -3, 1).(1, 1, 1) = 0$.



Logo não se pode encontrar qualquer ponto comum aos três planos. As equações do sistema dizem-se condições **incompatíveis**.

5. Investigue se há pontos comuns aos três planos dados pelas seguintes equações:

$$\alpha\text{: } x + 2y - 3z = -6 \ ; \ \beta\text{: } 2x - y - z = 3 \ \text{ e } \ \gamma\text{: } x + y - 2z = -3 \,.$$

Resolução

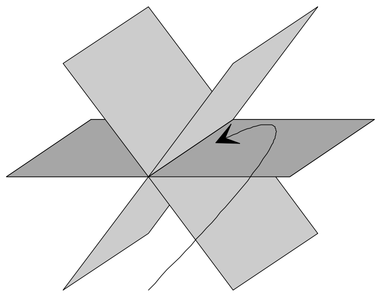
Resolvendo o sistema, vem

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ 2x-y-z=3 \\ x+y-2z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ y-z=-3 \\ -3y+3z=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ y-z=-3 \\ y-z=-3 \end{cases}$$

o que equivale a obter apenas duas equações.

Então, como há 3 incógnitas, podemos exprimir duas delas em função da terceira, o que mostra que o sistema é **indeterminado**:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-6 \\ y=z-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2(z-3)-3z=-6 \\ y=z-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z-3 \end{cases}.$$



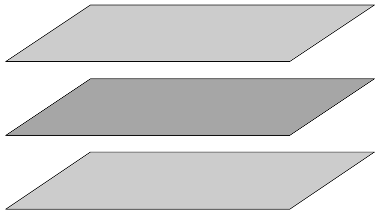
Para cada valor escolhido para z vem um valor para x, outro para y, logo o sistema tem infinitas soluções.

O sistema $\begin{cases} x=z \\ y=z-3 \end{cases}$ pode escrever-se $\frac{x}{1} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{1}$, logo a recta que passa em (0, -3, 0), com vector director (1, 1, 1) é comum aos três planos dados; todos os seus pontos são solução do sistema.

6. Qual a intersecção dos planos α: $2x + y - z = 3$; β: $4x + 2y - 2z = 10$ e γ: $6x + 3y - 3z = 0$

Resolução

O sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 10 \\ 6x + 3y - 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 6 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$ não tem soluções.



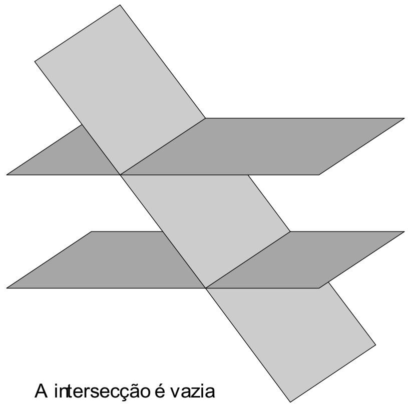
Os vectores normais $\vec{n}_\alpha = (2,1,-1)$, $\vec{n}_\beta = (4,2,-2)$ e $\vec{n}_\gamma = (6,3,-3)$ são paralelos, logo também são paralelos os planos e são conjuntos disjuntos. A intersecção é vazia. Este sistema é **impossível**.

A intersecção é vazia

7. Qual a intersecção dos planos α: $2x + y - z = 3$; β: $4x + 2y - 2z = 10$ e γ: $x + y - z = 1$

Resolução

O sistema $\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 4x + 2y - 2z = 10 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ 2x + y - z = 6 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$ não tem soluções.



Os vectores normais $\vec{n}_\alpha = (2,1,-1)$, $\vec{n}_\beta = (4,2,-2)$ são paralelos, logo também são estritamente paralelos os planos α e β. Estes planos são concorrentes com o plano γ.

A intersecção é vazia. Este sistema é **impossível**.

A intersecção é vazia

8. Qual a intersecção dos planos:

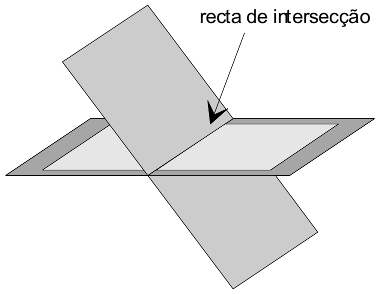
$$\alpha\text{: } 2x - 3y + z = 2 \text{ ; } \beta\text{: } x - 2y - z = 1 \text{ e } \gamma\text{: } 2x - 4y - 2z = 2\text{ ?}$$

Resolução

Dois dos planos são coincidentes (β e γ) e o terceiro não é paralelo aos dois restantes (os vectores normais, $\vec{n}_\alpha = (2,-3,1)$ e $\vec{n}_\beta = (1,-2,-1)$ não são paralelos), logo a sua intersecção é uma recta.

Resolvendo o sistema em ordem a x e a y, vem

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \times (2y + z + 1) - 3y + z = 2 \\ x - 2y - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3z \\ x = -5z + 1 \end{cases}$$



ou seja, $\frac{x-1}{-5} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$, que são equações cartesianas da recta de intersecção.

Essa recta passa no ponto (1, 0, 0) e é paralela ao vector $\vec{v} = (-5,-3,1)$.

Há infinitos ternos ordenados (x, y, z) que verificam o sistema (qualquer ponto da recta de intersecção verifica o sistema) por isso diz-se que o sistema é **indeterminado**.

O Professor