Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

27/10/98 ***Trigonometria - 6*** **11.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +10 pontos; cada resposta errada, -10/3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. No sistema sexagesimal, o valor mais aproximado da amplitude dum ângulo de 1,2 radianos é:

[A] 68º 45' 17,77''. **[B]** 68º 55' 27,17''.
[C] 68º 44' 47,17''. **[D]** 68º 57' 17,77''.

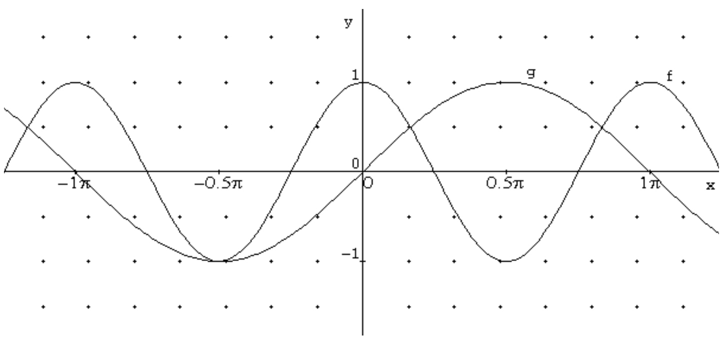
2. A expressão $\text{sen}^4 x - \cos^4 x$ é equivalente a:

[A] 1. **[B]** $1 - 2.\text{sen}^2 x$.
[C] $2.\cos^2 x + 1$. **[D]** $2.\text{sen}^2 x - 1$.

3. As soluções da equação $2.\cos^2 x - 1 = 0$ são:

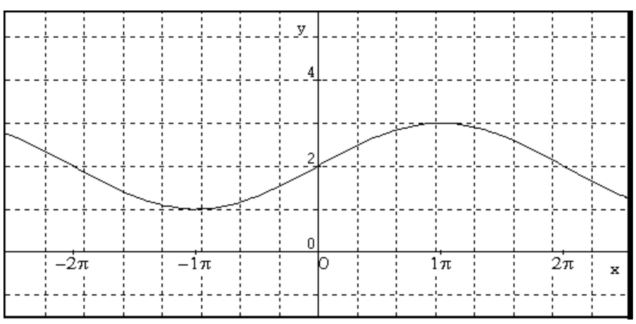
[A] $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$. **[B]** $x = \pm\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$.
[C] $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in Z$. **[D]** $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in Z$.

4. A figura junta representa parte dos gráficos das funções definidas por:



[A] $f(x) = \cos x$ *e* $g(x) = \text{sen}\,(2x)$.
[B] $f(x) = \cos x$ *e* $g(x) = \text{sen}\,(\frac{x}{2})$.
[C] $f(x) = \cos\,(2x)$ *e* $g(x) = \text{sen}\,x$.
[D] $f(x) = \cos\,(\frac{x}{2})$ *e* $g(x) = \text{sen}\,x$.

5. A figura junta representa parte do gráfico da função definida por:



[A] $f(x) = 2 + \text{sen}\,(\frac{x}{2})$.
[B] $f(x) = 2 + \text{sen}\,(2x)$.
[C] $f(x) = 2.\text{sen}\,(\frac{x}{2})$.
[D] $f(x) = 2.\text{sen}\,(2x)$.

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Resolva cada uma das seguintes condições:

a) $tg\,(-\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

b) $sen^2(2x) = sen\,(2x)$.

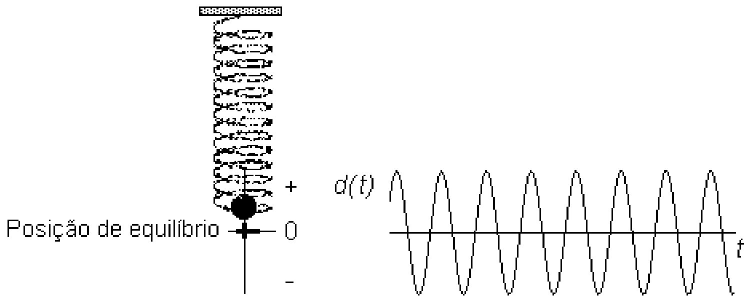
2. Determine $m \in R$ de modo que $sen\,\alpha = m+1$ e $\cos\,\alpha = \frac{1}{2}m$.

3. Determine o conjunto de valores reais de k que tornam possível a condição: $sen\,\alpha = 1-k^2 \;\wedge\; \alpha \in [\frac{\pi}{2},\ \pi]$.

4. Um corpo suspenso de uma mola elástica, colocada verticalmente, oscila continuamente para cima e para baixo da posição de equilíbrio.

No instante t segundos, o deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio é dada, em cm, por:

$$d(t) = 2.sen\,(3\pi t - \frac{\pi}{3})$$



a) Enquadre, com aproximação à décima de milímetro, a distância do corpo à posição de equilíbrio no instante inicial da contagem do tempo.
Nesse instante, o corpo encontrava-se acima ou abaixo da posição de equilíbrio?

b) Determine os instantes em que o corpo cruzou a posição de equilíbrio durante o primeiro segundo da contagem do tempo.

5. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = 2\cos^2 x \; -1$.

a) Indique o domínio e o contradomínio da função.

b) Sabendo que $tg\alpha = \frac{1}{2}$, determine $f(\alpha)$.

c) Determine a expressão geral dos zeros da função.

6. Considere a função real de variável real definida por

$$f(x) = sen^2 x + (\cos x - 1)^2 - 3$$

a) Prove que $f(x) = -1 - 2\cos x$, $\forall x \in R$.

NOTA: Para as alíneas seguintes, tenha presente que $f(x) = -1 - 2\cos x$, $\forall x \in R$.

b) Indique o contradomínio de *f.*

c) Determine os zeros de *f* pertencentes a $[0,\ 2\pi]$.

d) Resolva a condição $f(x) < 2$.

<u>**SOLUÇÕES**</u>

1.ª Parte

1. A **2.** D **3.** C **4.** C **5.** A

2.ª Parte

1.

a)

$$tg\,(-\frac{x}{2}) = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow tg\,(\frac{x}{2}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \ k \in Z$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in Z$$

b)

$$sen^2(2x) = sen\,(2x) \Leftrightarrow sen^2(2x) - sen\,(2x) = 0$$
$$\Leftrightarrow sen\,(2x).[sen\,(2x) - 1] = 0$$
$$\Leftrightarrow sen\,(2x) = 0 \ \vee\ sen\,(2x) = 1$$
$$\Leftrightarrow 2x = k\pi \ \vee\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\quad k \in Z$$
$$\Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2} \ \vee\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\quad k \in Z$$

2. Tendo em consideração o contradomínio das funções seno e co-seno, podemos de imediato afirmar:

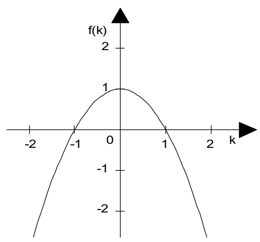
$$\begin{cases} -1 \le m+1 \le 1 \\ -1 \le \frac{1}{2}m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in [-2,0] \\ m \in [-2,2] \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-2,0]\,.$$

Por outro lado, considerando a fórmula fundamental da trigonometria, temos:

$$(m+1)^2 + (\frac{1}{2}m)^2 = 1 \Leftrightarrow m^2 + 2m + 1 + \frac{m^2}{4} = 1$$
$$\Leftrightarrow 4m^2 + 8m + m^2 = 0$$
$$\Leftrightarrow m(5m+8) = 0$$
$$\Leftrightarrow m = 0 \ \vee\ m = -\frac{8}{5}$$

Portanto, os valores de m pretendidos são: 0 e -8/5.

3. Considerando a variação da função seno no intervalo considerado, k terá de satisfazer a condição: $0 \le 1 - k^2 \le 1 \Leftrightarrow 0 \le -(k+1)(k-1) \le 1$.
Por outro lado, considerando o estudo da função quadrática, vem de imediato: $k \in [-1, 1]$.



4.

a) Ora, $d(0) = 2.\text{sen}\,(3\pi \times 0 - \frac{\pi}{3}) = 2.\text{sen}\,(-\frac{\pi}{3}) = -2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$.

Portanto, designando por x essa distância, temos $17{,}3 < x < 17{,}4$ (em milímetros).
Como nesse instante o deslocamento do corpo em relação à posição de equilíbrio era negativo, então o corpo encontrava-se abaixo da posição de equilíbrio (de acordo com os elementos da figura).

b) Determinemos os zeros da função no domínio considerado ($t \ge 0$):

$$d(t) = 0 \Leftrightarrow 2.\text{sen}\,(3\pi t - \frac{\pi}{3}) = 0$$
$$\Leftrightarrow 3\pi t - \frac{\pi}{3} = k\pi,\ k \in Z_0^+$$
$$\Leftrightarrow 3t = \frac{1}{3} + K,\ k \in Z_0^+$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{9},\ k \in Z_0^+$$

Logo,

$$k = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{9}$$
$$k = 1 \Rightarrow t = \frac{4}{9}$$
$$k = 2 \Rightarrow t = \frac{7}{9}$$
$$k = 3 \Rightarrow t = \frac{10}{9} > 1$$

Assim, durante o primeiro segundo o corpo cruzou a posição de equilíbrio passados $\frac{1}{9}$, $\frac{4}{9}$ e $\frac{7}{9}$ segundos após o início da contagem do tempo.

5.

a) $D_f = R$ e $D'_f = [-1,\ 1]$.

b) Sabendo que $tg^2 x + 1 = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, temos $\cos^2 \alpha = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{5}$.

Logo, $f(\alpha) = 2 \times \dfrac{4}{5} - 1 = \dfrac{3}{5}$.

c)

$$\begin{aligned} f(x)=0 \ &\Leftrightarrow\ \cos^2 x = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \ \vee\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\Leftrightarrow\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ \ k \in Z \end{aligned}$$

6.

a)

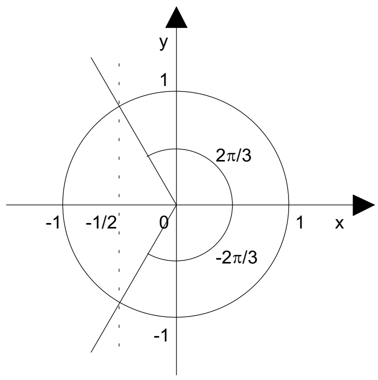
$$\begin{aligned} f(x) &= sen^2 x + (\cos x - 1)^2 - 3 \\ &= sen^2 x + \cos^2 x - 2.\cos x + 1 - 3 \\ &= 1 - 2.\cos x + 1 - 3 \\ &= -1 - 2.\cos x \end{aligned}$$

Portanto, $f(x) = -1 - 2\cos x$, $\forall x \in R$.

b) O contradomínio de *f* é $D'_f = [-3,\ 1]$.

c)

$$\begin{aligned} f(x)=0 \ &\Leftrightarrow\ -1-2\cos x = 0 \\ &\Leftrightarrow\ \cos x = -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ \ k \in Z \end{aligned}$$

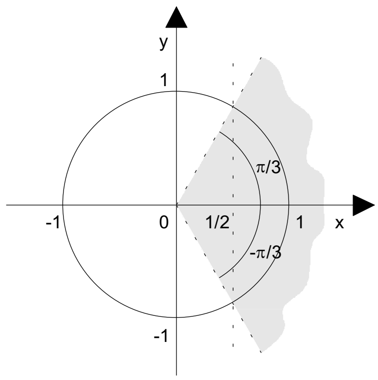


Ora, $\begin{array}{l} k=0 \ \Rightarrow\ x = -\dfrac{2\pi}{3} \ \vee\ x = \dfrac{2\pi}{3} \\ k=1 \ \Rightarrow\ x = \dfrac{4\pi}{3} \ \vee\ x = \dfrac{8\pi}{3} \end{array}$

portanto, $\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\}$ é o conjunto dos zeros de *f* pertencentes a $[0,\ 2\pi]$.

d)

$$\begin{aligned} f(x) < -2 \ &\Leftrightarrow\ -1-2\cos x < -2 \\ &\Leftrightarrow\ -2\cos x < -1 \\ &\Leftrightarrow\ \cos x > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow\ x \in \left]-\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right[,\ \ k \in Z \end{aligned}$$



O Professor