

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

15/01/99

Trabalho de Grupo

11.º Ano

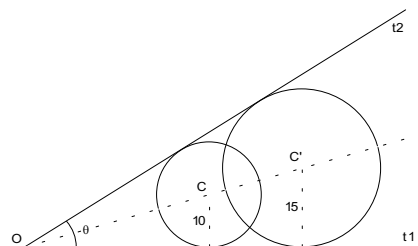
Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

O problema que se apresenta a seguir é seu conhecido, pois já teve oportunidade de contactar com ele pelo menos duas vezes.

Vamos agora abordar o mesmo problema usando recursos diferentes e resolver umas questões novas sobre o mesmo assunto.

Na figura estão representadas duas circunferências de centros C e C' e raios 10 e 15 centímetros, respectivamente.

As semi-rectas t_1 e t_2 são tangentes às duas circunferências e formam entre elas um ângulo θ tal que $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.



a) Sendo $\overline{CC'}$ a distância entre os centros das duas circunferências,

mostre que, na unidade considerada, $\overline{CC'} = \frac{5}{\sin \frac{\theta}{2}}$.

b) Sabe-se que expressão da alínea anterior é válida para toda a posição relativa das circunferências, desde que as semi-rectas t_1 e t_2 lhes sejam tangentes.

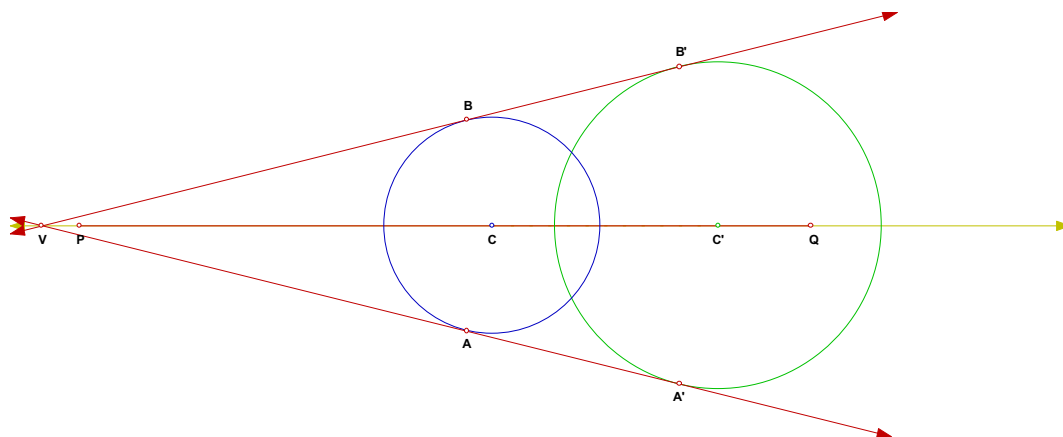
b1) Para que valor do ângulo θ as duas circunferências são tangentes? (Aproximação a menos de 0,01 rad).

b2) Qual é a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências? Justifique o seu raciocínio.

SUGESTÃO: Tenha em consideração a variação da função seno no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1.ª Parte

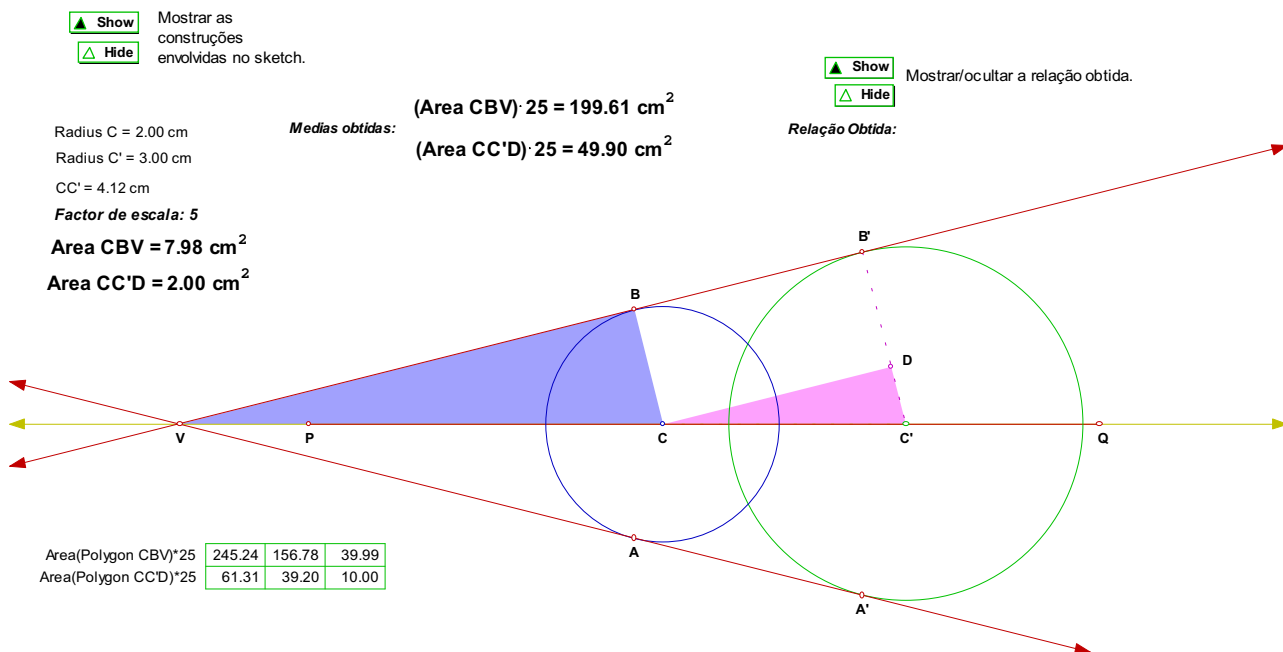
1. Considere o *sketch* «Tg-2cir1.gsp» do *Geometer's Sketchpad*, que simula de fórmula dinâmica a situação acima referida. A imagem seguinte reproduz parte do referido *sketch*.



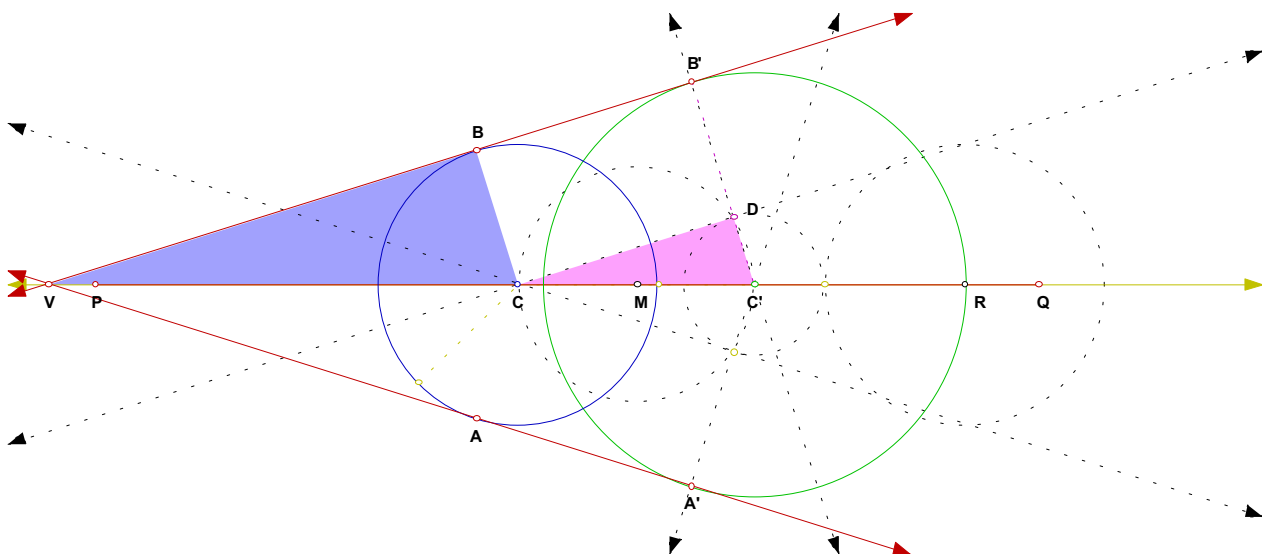
a) Considerando as indicações fornecidas no *sketch*, obtenha diferentes posições relativas para os centros das duas circunferências e verifique a relação indicada na alínea a) do problema proposto.

- b) Determine, com a aproximação possível, o valor da amplitude referida na alínea b) do problema.
- c) No contexto do problema, investigue, com a aproximação possível, qual a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências (note que $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$).

2. Considere agora o *sketch* «Tg-2cir2.gsp».
A imagem seguinte reproduz parte do referido *sketch*.



- a) Investigue a relação entre as áreas dos dois triângulos considerados.
- b) Designado por r e R , respectivamente, os raios das circunferências menor e maior, mostre, justificando, que a relação entre as áreas desses triângulos é $\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{r}{R-r}\right)^2$.
Comprove que o valor encontrado na alínea anterior satisfaz esta relação.
- c) A imagem seguinte apresenta as construções escondidas no *sketch*.
Analise essas construções.



3. Num referencial ortonormado, considere duas circunferências de centros $C(2, 2)$ e $C'(8, 8)$ e raios, respectivamente, 2 unidades e 5 unidades, representadas na figura ao lado, assim como as tangentes a essas circunferências.

Usando cálculo vectorial e trigonometria, pretende-se determinar as coordenadas dos pontos A, B, A' e B' , pontos de intersecção das tangentes com as duas circunferências dadas, assim como as equações dessas circunferências.

SUGESTÃO: Tenha em consideração relações já obtidas nas actividades anteriores.

- a) Explore o sketch «Tg-2cir3.gsp».

- b) Justifique a existência de duas circunferências tangentes interiores que passam, respectivamente, pelos pontos V, B e C , e pelos pontos V, B' e C' .

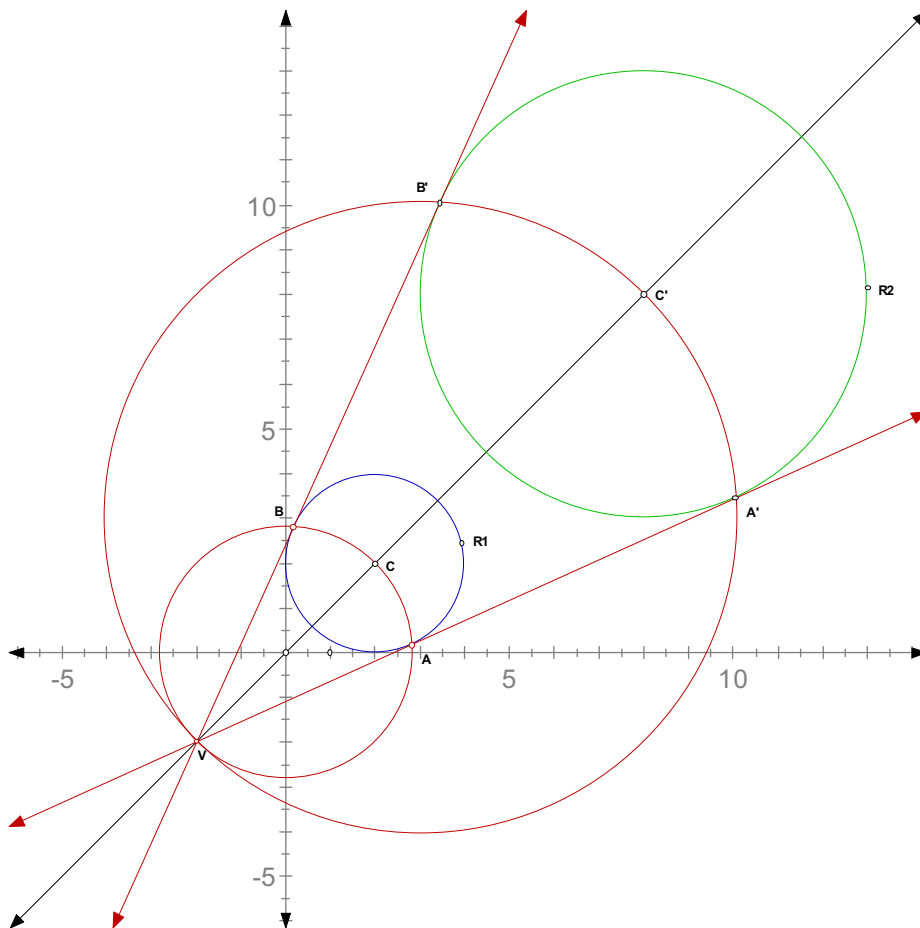
- c) Determine as equações das duas circunferências referidas na alínea anterior.

- d) Descreva um processo que permita determinar as coordenadas dos pontos A, B, A' e B' .

- e) É possível mostrar que as coordenadas dos pontos A e B são:

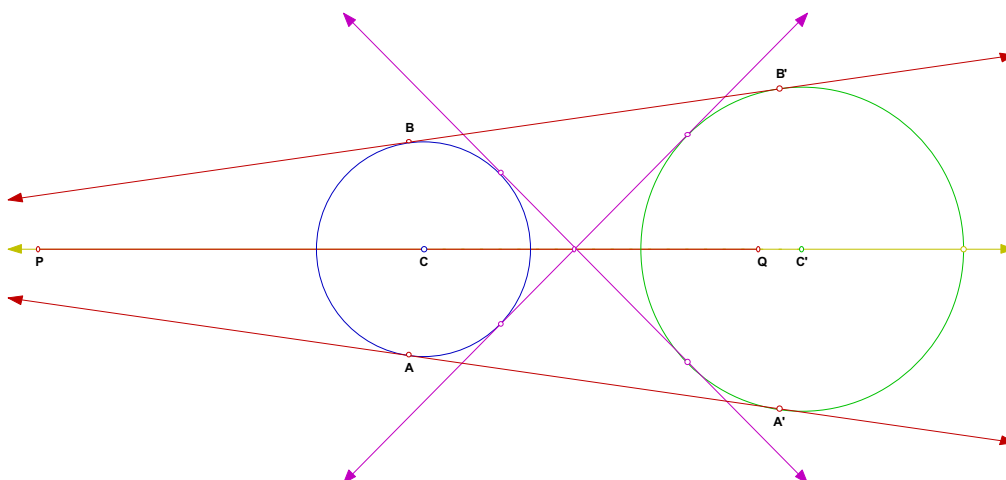
$$A\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right) \quad \text{e} \quad B\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right).$$

Explore de novo o sketch «Tg-2cir3.gsp» e verifique estas coordenadas assim como as equações que obteve na alínea c).



4. UM DESAFIO para as Férias da Páscoa ...

Já comentou, com toda a certeza, que além destas duas tangentes existem outras duas, como poderá confirmar no sketch «Tg-2cir4.gsp». Como determinar estas últimas duas tangentes?



2.ª Parte

Para cada uma das questões seguintes, escreva um texto coerente sobre a sua resolução, de um modo que seja compreensível para um leitor (o professor, os colegas ou mesmo outras pessoas). Para isso, reflita globalmente sobre o problema, as razões por que o abordou de uma certa maneira e as relações entre as principais ideias matemáticas envolvidas. Não se esqueça de explicitar os procedimentos que usou e explique as suas afirmações. Inclua ainda os desenhos ou esquemas que usou.

Aquele que não é capaz de comunicar aquilo que fez com um problema não o resolveu verdadeiramente.

1. Relativamente à alínea e) da questão 3 da 1.ª Parte, complete de forma clara e coerente uma exposição que permite determinar as coordenadas dos pontos A e B:

" Sendo B (x, y) e considerando alguns dos resultados e relações obtidas anteriormente, nomeadamente,

começemos por calcular, usando a definição, o produto escalar dos vectores \vec{CV} e \vec{CB} :

$$\vec{CV} \cdot \vec{CB} = \dots \qquad \qquad \qquad = 4.$$

Por outro lado, o mesmo produto escalar, agora expresso em termos das coordenadas dos dois vectores, é:

$$\vec{CV} \cdot \vec{CB} = \dots$$

Assim, ... obtemos a equação $y = -x + 3$, que não é mais do que a equação reduzida da recta, pois contém o ponto e é, visto o declive desta última ser e do da primeira.

Considerando agora a intersecção desta recta com a circunferência tangente interior de menor raio, temos:

$$x^2 + (-x + 3)^2 = 8 \Leftrightarrow \dots$$

Assim, as coordenadas dos pontos A e B são $A\left(\frac{3-\sqrt{7}}{2}, \frac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$ e $B\left(\frac{3+\sqrt{7}}{2}, \frac{3-\sqrt{7}}{2}\right)$.

Esta relação entre as coordenadas não é de estranhar, pois sendo estes pontos em relação à recta de equação $y = x$, bastará para obter as coordenadas do outro."

2. Relativamente à alínea c) da questão 1 da 1.ª Parte, mostre que o valor exacto dessa distância é $5\sqrt{2}$ cm.

3. Considere a alínea c) da questão 2 da 1.ª Parte.

Descreva a sequência correcta das construções e justifique o processo usado para traçar as tangentes, usando apenas régua não graduada e compasso.

Reproduza essas construções usando material de desenho.

Auto-Avaliação							
Nível de qualidade / Parâmetros	A	B1	B2	B3	B4	B5	Apreciação Global
Avaliação (1, 2, 3, 4 ou 5)							

O Professor