Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 *Geometria 2 - Revisões* **11.º Ano**

Nome: ______________________________	N.º: ___	Turma:____

1. A região do espaço definida, num referencial ortonormado, por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \ \wedge \ z = -\frac{1}{2}$ é:

[A] a circunferência de centro (0, 0, $-\frac{1}{2}$) e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[B] o círculo de centro (0, 0, 0) e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

[C] a circunferência de centro (0, 0, $-\frac{1}{2}$) e raio 1.

[D] o círculo de centro (0, 0, $-\frac{1}{2}$) e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2. Pelos pontos A (1, -2, 1), B (3, -1, 2), C (-1, -3, 0) passa (ou passam):

[A] um e um só plano.
[B] uma infinidade de planos.
[C] três e só três planos.
[D] nenhum plano.

3. Num referencial ortonormado Oxyz, os planos α e β são definidos pelas equações:

$$\alpha:\ x - y + z + \frac{1}{2} = 0 \qquad \text{e} \qquad \beta:\ 2x + 2y + 2z + 1 = 0$$

Os planos α e β são:

[A] coincidentes.
[B] estritamente paralelos.
[C] concorrentes não perpendiculares.
[D] perpendiculares.

4. Indique qual dos pares de equações seguintes define, num referencial ortonormado *Oxyz*, um par de planos perpendiculares.

[A] $x + y = 3$ e $x + y = 0$
[B] $-x + y - z = 1$ e $3x + 2y + 2z = 2$.
[C] $x = y$ e $z = 0$.
[D] $2x + 2y + z = 9$ e $x - 3z = 0$.

5. Num referencial ortonormado *Oxyz*, a intersecção das superfícies esféricas definidas pelas equações

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

é:

[A] Um ponto.
[B] Uma superfície esférica.
[C] Uma circunferência.
[D] O conjunto vazio.

6. Dois planos α e β são estritamente paralelos. Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

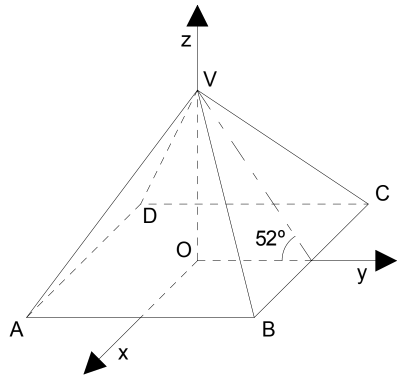
[A] Qualquer recta contida em α é paralela a qualquer recta contida em β.

[B] Há rectas contidas em α que intersectam β.

[C] Há rectas perpendiculares a α que não são perpendiculares a β.

[D] Dada uma recta contida em α, existem em β infinitas rectas que lhe são paralelas.

7. Na pirâmide de Keops, quadrangular regular, a aresta da base tem 23 dam de comprimento e o ângulo que cada face forma com a base é de 52º.
Sejam A, B, C e D os vértices da base e V o vértice da pirâmide.
Considere o referencial ortonormado em que a unidade considerada é 10 metros e indique:



a) As coordenadas do vértice V da pirâmide (utilize uma aproximação a menos de 0,1).

b) Uma equação cartesiana do plano perpendicular a VB e que contém o vértice D.

c) Uma equação vectorial da recta paralela a VC e que contém o ponto (2, -1, 0).

d) Considere a família dos vectores perpendiculares a $\overrightarrow{CA}$ que têm origem em A e norma igual a 2. Que lugar geométrico definem os pontos extremidade destes vectores? Caracterize-o por uma condição em x, y, z.

8. Considere, num referencial ortonormado $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, o vector $\vec{u} = (2, 5, 0)$.

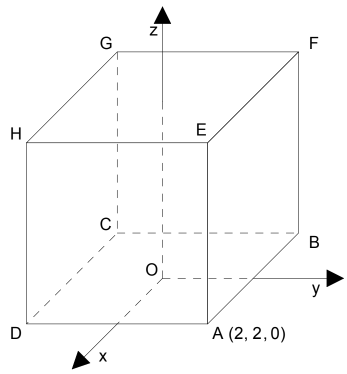
a) Indique, justificando, dois vectores que sejam perpendiculares a $\vec{u}$ mas que não sejam colineares.

b) Qual o ângulo de $\vec{u}$ com $\vec{e}_1$? (Aproximação a menos de 0,01 radianos.)

c) Escreva uma equação cartesiana do plano α perpendicular a $\vec{u}$ e que intersecta o eixo *Oy* no ponto (0, 1, 0).

d) Considere os planos, β: $x + y + z = 1$, γ: $3y - 2z = 1$.
Indique, justificando, qual a posição relativa dos planos α, β e γ.

9. No referencial ortonormado *Oxyz* está representado um cubo de faces paralelas aos planos coordenados. O perímetro de cada face é, na unidade considerada, igual a 16.



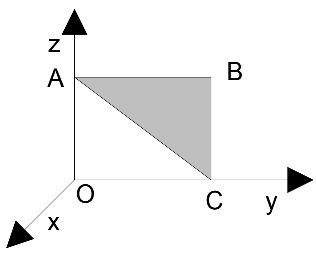
a) Escreva uma equação cartesiana do plano que contém os pontos D, G e F.

b) Defina analiticamente a superfície esférica tangente a todas as faces do cubo.

c) Determine *k*, caso exista, de modo que o vector $\vec{u} = (k^2 + 2k, k^2 - 1, 3)$ seja colinear com $\overrightarrow{CH}$.

d) Sendo M e N os pontos médios das arestas [AB] e [EF], respectivamente, determine as coordenadas do ponto P$\in$[HE] sabendo que a secção plana determinada no cubo pelo plano MNP é um quadrado.

10. No referencial ortonormado *Oxyz*, [ABC] é um triângulo rectângulo em B contido no plano *yoz*.
Na unidade considerada, $\overline{OC} = 4$ e $\overline{OB} = 5$.



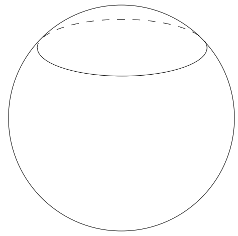
a) Defina por equações cartesianas a recta AC.

b) Considere que o triângulo [ABC] roda uma volta completa em torno do eixo *Oy*.

b1) Defina analiticamente a linha que o ponto A descreve no plano *xOz* na referida rotação.

b2) Calcule o volume do sólido gerado pelo triângulo [ABC] na rotação descrita.

11. A embalagem de um certo gelado é uma superfície esférica.
Num referencial ortonormado essa superfície tem por equação: $x^2 + y^2 + z^2 = 13$.



a) O bordo da "tampa" da embalagem é uma circunferência que se obtém seccionando a superfície esférica por um plano β, de cota positiva e paralelo a *xOy*.
Sabendo que, na unidade considerada, o bordo da "tampa" tem perímetro igual a 2π , escreva uma equação do plano β.

b) Verifique que o ponto A (2, 3, 0) pertence à superfície esférica e determine as coordenadas do ponto B, de modo que [AB] seja diâmetro da superfície esférica.

c) Seja α o plano mediador (perpendicular no ponto médio) do segmento [AB].
Determine $k \in IR$ de modo que α seja perpendicular ao plano definido por $ky - 2x = z$.

d) Defina analiticamente o segmento de recta [OA].

12. Seja α o plano de equação $5x + y = 3z + 3$.

a) Defina por uma condição vectorial a recta perpendicular a α e que passa pelo ponto de intersecção de α com o eixo *Oy*.

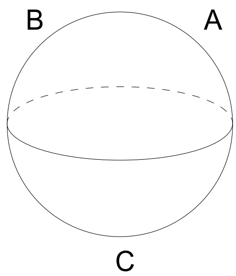
b) Para cada número real k a equação $kx + (3 - 5k)y + z = 0$ representa um plano π_k .

b1) Mostre que qualquer que seja k , π_k e α são perpendiculares.

b2) Diga, justificando, se existe $k \in IR$ tal que π_k seja plano mediador do segmento [OA], sendo O a origem do referencial e A (1, -2, 1).

13. Considere, num referencial ortonormado *Oxyz*, a superfície esférica de equação

$$x^2 + y^2 + z^2 = 25 .$$



- A superfície esférica está representada na figura junta.
- Os pontos A, B e C são pontos dessa superfície.
- O ponto A tem coordenadas (0, 4, 3).
- O ponto B tem coordenadas (0, -4, 3).
- O ponto C é um ponto de cota negativa do eixo *Oz*.

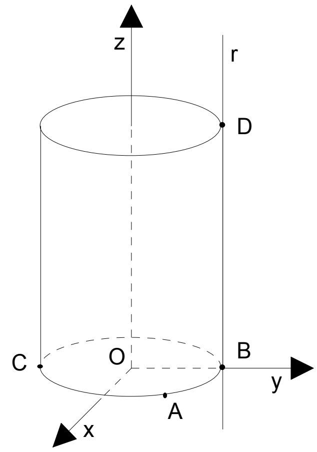
a) (Considere todos os triângulos cujos vértices são pontos de intersecção desta superfície esférica com os eixos do referencial.
Escolhido um desses triângulos ao acaso, determine a probabilidade de estar contido no plano definido por $z = 0$. Indique o resultado em forma de percentagem.)

b) Mostre que uma equação do plano tangente à superfície esférica no ponto A é $4y + 3z = 25$.
(Note que um plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio no ponto de tangência.)

c) Justifique que C tem coordenadas (0, 0, -5) e determine as coordenadas do ponto de intersecção do plano referido na alínea anterior com a recta BC.

d) Calcule $tg\,(A\hat{C}B)$.

14. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*, um cilindro de revolução como o representado na figura junta.



- A base inferior do cilindro tem centro na origem O do referencial e está contida no plano *xOy*.
- [BC] é um diâmetro da base inferior, contido no eixo *Oy*. O ponto C tem coordenadas (0, -5, 0).
- O ponto A pertence à circunferência que limita a base inferior do cilindro e tem coordenadas (4, 3, 0).
- A recta *r* passa no ponto B e é paralela ao eixo *Oz*.
- O ponto D pertence à recta *r* e à circunferência que limita a base superior do cilindro.

a) Justifique que a recta AC é perpendicular à recta AB.

b) Escreva uma equação vectorial da recta *r*.

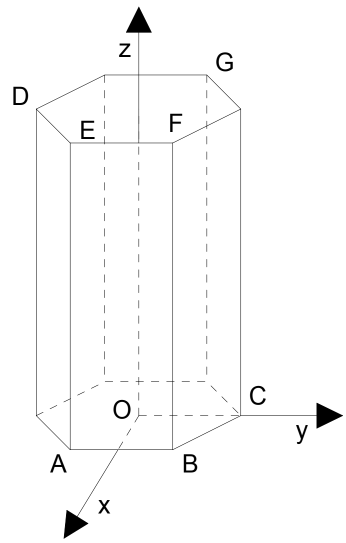
c) Justifique que $\overrightarrow{AC}$ é um vector perpendicular ao plano ABD.
Determine uma equação deste plano.

d) Designando por α a amplitude, em radianos, do ângulo BOD, mostre que o volume do cilindro é dado por

$V(\alpha) = 125\pi . tg\ \alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

(Determine $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} V(\alpha)$ e interprete o resultado obtido.)

15. Considere o prisma hexagonal regular representado num referencial o. n. *Oxyz*.
Sabe-se que:



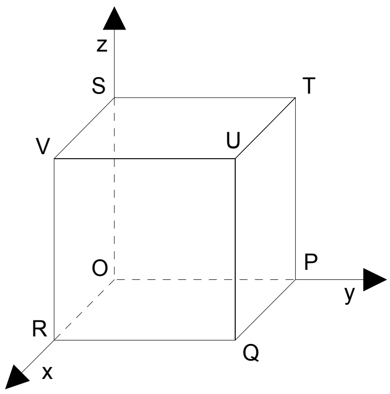
- os pontos A, B e C pertencem à base inferior do prisma, a qual está contida no plano *xoy* e tem por centro a origem do referencial;
- os pontos D, E, F e G pertencem à base superior do prisma, a qual está contida no plano de equação $z = 12$;
- o ponto C tem coordenadas (0, 4, 0).

a) Mostre que o ponto B tem coordenadas ($\sqrt{12}$, 2, 0) e aproveite este resultado para justificar que o ponto G tem coordenadas ($-\sqrt{12}$, 2, 12).

b) Mostre que a recta DG pode ser definida pela condição
$\sqrt{3}x + y = -4 \quad \wedge \quad z = 12$.

c) Determine a intersecção da recta DG com o plano que contém a face [ABFE] do prisma.

16. Na figura está representado um cubo, em referencial o. n. *Oxyz*.



- O vértice O coincide com a origem do referencial.
- O vértice R pertence ao semieixo positivo *Ox*.
- O vértice P pertence ao semieixo positivo *Oy*.
- O vértice S pertence ao semieixo positivo *Oz*.
- A abcissa de R é 2.

a) Determine uma equação cartesiana do plano PUV.

b) Mostre que o raio da superfície esférica que contém os oito vértices do cubo é $\sqrt{3}$ e determine uma equação dessa superfície esférica.

c) Calcule a área da região do plano PUV compreendida entre a secção determinada por esse plano, no cubo, e a secção determinada pelo mesmo plano, na superfície esférica referida na alínea anterior.

SOLUÇÕES

1. D

2. B

3. C

4. C

5. D

6. D

7.

a) V (0; 0; 14,7).

b) $x + y - tg\ 52°.z + 23 = 0$.

c) $(x, y, z) = (2, -1, 0) + k(-11{,}5; 11{,}5; -14{,}7),\ k \in IR$.

d) O lugar geométrico é a circunferência de raio 2 unidades, centrada em A, assente sobre o plano de equação $x - y - 23 = 0$.
Uma condição é:
$(x - 11{,}5)^2 + (y + 11{,}5)^2 + z^2 = 4 \quad \wedge \quad x - y - 23 = 0$

8.

a) $\vec{v} = (0, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-5, 2, 0)$ (p.e.), pois $\vec{v}\vec{u} = \vec{w}\vec{u} = 0$.

b) 1,19 rad.

c) $2x + 5y - 5 = 0$.

d) O sistema é impossível e, portanto, os três planos não se intersectam. Os planos intersectam-se dois a dois segundo rectas paralelas.

9.

a) $x + z = 2$.

b) $x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 4$.

c) $k = 1$.

d) P (2, 2-2$\sqrt{3}$, 4).

10.

a) $x = 0 \quad \wedge \quad 3y + 4z - 12 = 0$.

b) $x^2 + z^2 = 9 \quad \wedge \quad y = 0$.

c) 24π .

11.

a) $z = 2\sqrt{3}$.

b) B (-2, -3, 0).

c) $k = \frac{4}{3}$.

d) $3x = 2y \quad \wedge \quad z = 0 \quad \wedge \quad 0 \le x \le 2$.

12.

a) $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(5, 1, -3),\ k \in IR$.

b) Não existe qualquer $k \in IR$ que verifique a condição.

13.

a) (20%.)

b)

c) (0, -, 35).

d) $+\frac{4}{3}$.

14.

a)

b) $(x, y, z) = (0, 5, 0) + k(0, 0, 1),\ k \in IR$.

c) $x + 2y - 10 = 0$.

d) ($+\infty$.)

15.

a)

b)

c) (2$\sqrt{3}$, -10, 12).

16.

a) $x - z = 0$.

b) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 3$.

c) $3\pi - 4\sqrt{2}$.

O Professor

Proposta de Resolução:

7.

a) Designando por E o ponto de intersecção do eixo *Oy* com a aresta [BC], temos $tg\ 52^o = \dfrac{\overline{OV}}{\overline{OE}}$.

Logo, $\overline{OV} = \dfrac{23}{2} \times tg\ 52^o \approx 14{,}7$. Assim, $V\ (0; 0; 14{,}7)$.

b) Designando por P (x, y, z) um ponto genérico do plano considerado, os vectores $\overrightarrow{DP} = (x + 11{,}5;\ y + 11{,}5\ ; z)$ e $\overrightarrow{VB} = (11{,}5;\ 11{,}5\ ;0) - (0;\ 0;\ 11{,}5 \times tg\ 52^o) = (11{,}5;\ 11{,}5;\ -11{,}5 \times tg\ 52^o)$ são perpendiculares.
Assim,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DP}.\overrightarrow{VB} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad 11{,}5 \times (x + 11{,}5) + 11{,}5 \times (y + 11{,}5) - 11{,}5 \times z \times tg\ 52^o = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x + y - z.tg\ 52^o + 23 = 0 \end{aligned}$$

Portanto, $x + y - tg\ 52^o.z + 23 = 0$ é uma equação cartesiana do plano considerado.

c) Como $\overrightarrow{VC} = (-11{,}5;\ 11{,}5\ ;0) - (0;\ 0;\ 11{,}5 \times tg\ 52^o) = (-11{,}5;\ 11{,}5;\ -11{,}5 \times tg\ 52^o)$, uma equação vectorial da recta considerada é: $(x, y, z) = (2, -1, 0) + k(-11{,}5;\ 11{,}5;\ -11{,}5 \times tg\ 52^o),\ k \in IR$.

d) O lugar geométrico considerado é a circunferência de raio 2 unidades, centrada em A, assente sobre o plano perpendicular a AC e que passa em A.
Determinemos uma equação cartesiana do plano considerado. Um vector normal ao plano é $\vec{v} = (1, -1, 0)$, pelo que a equação procurada é do tipo $x - y + d = 0$. Dado que A é um ponto desse plano, então as suas coordenadas têm de verificar a equação anterior. Assim, como $11{,}5 - (-11{,}5) + d = 0 \Leftrightarrow d = -23$, uma equação do plano considerado é $x - y - 23 = 0$.

Logo, uma condição que caracteriza o lugar geométrico é: $(x - 11{,}5)^2 + (y + 11{,}5)^2 + z^2 = 4 \quad \wedge \quad x - y - 23 = 0$.

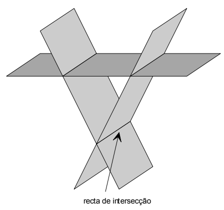
8.

a) Por exemplo, $\vec{v} = (0, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-5, 2, 0)$, pois $\vec{v}.\vec{u} = 0 \times 2 + 0 \times 5 + 1 \times 0 = 0$ e $\vec{w}.\vec{u} = -10 + 10 + 0 = 0$ (cada um destes vectores é perpendicular ao vector dado) e não existe um *k* real tal que $\vec{v} = k.\vec{w}$ (estes dois vectores não são colineares).

b) Ora, $\cos(\widehat{\vec{u}\ \vec{e}_1}) = \dfrac{(2, 5, 0).(1, 0, 0)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \times \sqrt{1^2}} = \dfrac{2}{\sqrt{29}} = \dfrac{2\sqrt{29}}{29}$. Logo, $\widehat{\vec{u}\ \vec{e}_1} = \cos^{-1} \dfrac{2\sqrt{29}}{29} \approx 1{,}19$ rad..

c) Um vector normal ao plano é $\vec{u} = (2, 5, 0)$, pelo que a equação procurada é do tipo $2x + 5y + d = 0$. Dado que o ponto $(0, 1, 0)$ é um ponto desse plano, então as suas coordenadas têm de verificar a equação anterior. Assim, como $5 + d = 0 \Leftrightarrow d = -5$, uma equação do plano considerado é $2x + 5y - 5 = 0$.

d) Como o sistema das equações desses três planos é impossível, os três planos não se intersectam.



$$\begin{array}{r} \\ (2) \\ (1) \end{array}\begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ x + y + z = 1 \\ 3y - 2z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 5 \\ 2x + 5y = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0x + 0y = 2 \\ 2x + 5y = 3 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

Visto que não há planos paralelos (atente em vectores normais a esses planos: não há um par de vectores colineares), os planos intersectam-se dois a dois segundo rectas paralelas.

9.

a) Comecemos por determinar a família de vectores perpendiculares ao plano considerado, isto é, perpendiculares a dois vectores não colineares desse plano.

Ora, $\overrightarrow{DF} = (-4, 4, 4)$ e $\overrightarrow{FG} = (0, -4, 0)$. Assim,

$$\begin{cases} \vec{n}.\overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{n}.\overrightarrow{FG} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a, b, c)(-4, 4, 4) = 0 \\ (a, b, c)(0, -4, 0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4b + 4c = 0 \\ -4b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = c \end{cases}$$

Portanto, $\vec{n} = (a, 0, a)$, com $a \in IR \setminus \{0\}$, traduz a família de vectores não nulos perpendiculares a esse plano. Considere-se um desses vectores - $\vec{n}_1 = (1, 0, 1)$, por exemplo - e P (x, y, z) um ponto genérico do plano considerado. Dado que os vectores a seguir indicados são perpendiculares, temos:

$$\overrightarrow{DP}.\vec{n}_1 = 0 \Leftrightarrow (x-2, y+2, z).(1, 0, 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow x + z - 2 = 0$$

Portanto, $x + z - 2 = 0$ é uma equação cartesiana do plano DFG.

b) Dado que essa superfície esférica tem raio 2 e centro no ponto de coordenadas (0, 0, 2), pode ser definida pela condição $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$.

c) Para que os vectores considerados sejam colineares, as suas coordenadas não nulas terão de ser proporcionais. Dado que $\vec{u} = (k^2 + 2k, k^2 - 1, 3)$ e $\overrightarrow{CH} = (4, 0, 4)$, então terá de ser:

$$\begin{cases} \dfrac{k^2 + 2k}{4} = \dfrac{3}{4} \\ k^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} \\ k = -1 \vee k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -3 \vee k = 1 \\ k = -1 \vee k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k = 1.$$

d) Como P∈[HE], então P (2, y, 4) com $-2 \le y \le 2$. Para que a secção plana determinada no cubo pelo plano MNP seja um quadrado, terá de ser $\overline{PN} = \overline{NM} = 4$ (porquê?). Logo,

$$\begin{cases} (2-0)^2 + (y-2)^2 + (4-4)^2 = 16 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2 = 12 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - 2\sqrt{3} \vee y = 2 + 2\sqrt{3} \\ -2 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow y = 2 - 2\sqrt{3}.$$

Portanto, $P(2, 2 - 2\sqrt{3}, 4)$.

10.

a) Como $A = (0, 0, 3)$, $C = (0, 4, 0)$ e $B = (0, 4, 3)$ (porquê?), então um vector director da recta é o vector $\overrightarrow{AC} = (0, 4, -3)$, podendo a recta AC ser definida parametricamente por:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 + 4k \\ z = 3 - 3k \end{cases}, k \in IR$$

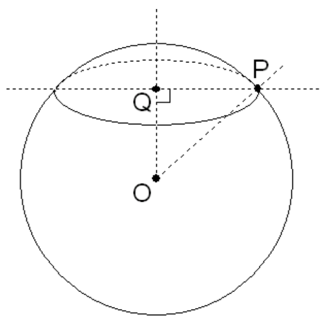
Logo, eliminando o parâmetro *k*, $x = 0 \wedge \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-3}{-3}$ e, portanto, $x = 0 \wedge 3y + 4z - 12 = 0$.

b1) Nessa rotação, o ponto A descreve uma circunferência no plano *xOz*, com centro em O e raio $\overline{OA}$, que pode ser definida pela condição $x^2 + z^2 = 9 \wedge y = 0$.

b2) Nessa mesma rotação, consideremos o rectângulo [OABC], decomposto nos triângulos rectângulos [ABC] e [AOC]. O volume pedido é a diferença entre os volumes dos sólidos gerados pelo rectângulo [OABC] e pelo triângulo rectângulo [AOC], respectivamente um cilindro e um cone.

Assim, $V = \pi \times \overline{OA}^2 \times \overline{OC} - \dfrac{\pi \times \overline{OA}^2 \times \overline{OC}}{3} = \dfrac{2}{3} \times \pi \times \overline{OA}^2 \times \overline{OC} = \dfrac{2}{3} \times \pi \times 9 \times 4 = 24\pi$.

11.



a) Como o perímetro é 2π, o bordo da tampa tem uma unidade de raio.

Assim, $\overline{OQ} = \sqrt{\overline{OP}^2 - \overline{PQ}^2} = \sqrt{13 - 1} = 2\sqrt{3}$, pelo que $Q\ (0, 0, 2\sqrt{3})$.

Logo, $z = 2\sqrt{3}$ é uma equação do plano β.

b) Ora, $2^2 + 3^2 + 0^2 = 13 \Leftrightarrow 13 = 13$. Como as coordenadas do ponto A verificam a equação da superfície esférica, então A é um dos seus pontos.

Ora, $B = A + 2 \times \overrightarrow{AO} = (2, 3, 0) + 2 \times (-2, -3, 0) = (-2, -3, 0)$.

c) Dois vectores normais aos planos considerados são, respectivamente, $\overrightarrow{AO} = (-4, -6, 0)$ e $\vec{n} = (-2, k, -1)$. Para que os planos sejam perpendiculares, estes vectores também terão de ser perpendiculares. Assim,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AO}.\vec{n} = 0 &\Leftrightarrow 8 - 6k = 0 \\ &\Leftrightarrow k = \tfrac{4}{3} \end{aligned}$$

d) Uma condição vectorial que define o segmento [AO] é $(x, y, z) = (2, 3, 0) + k(-2, -3, 0),\ k \in [0, 1]$, donde:

$$\begin{cases} x = 2 - 2k \\ y = 3 - 3k \\ z = 0 \end{cases} ,k \in [0,1] \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = \dfrac{x-2}{-2} \\ k = \dfrac{y-3}{-3} \\ z = 0 \end{cases} ,k \in [0,1]$$

Logo, $(\frac{x-2}{-2} = \frac{y-3}{-3} \ \wedge\ z = 0 \ \wedge\ 0 \le x \le 2) \Leftrightarrow 3x = 2y \ \wedge\ z = 0 \ \wedge\ 0 \le x \le 2$ define analiticamente o segmento de recta [OA].

12.

a) Comecemos por determinar a intersecção do plano α com o eixo Oy:

$$\begin{cases} 5x + y - 3z = 3 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 3 \end{cases} \qquad \text{Logo, } Q\,(0, 3, 0).$$

O vector $\vec{n}_\alpha = (5, 1, -3)$, normal ao plano α, é director da recta pedida. Assim, uma equação vectorial da recta pedida é $(x, y, z) = (0, 3, 0) + k(5, 1, -3),\ k \in IR$.

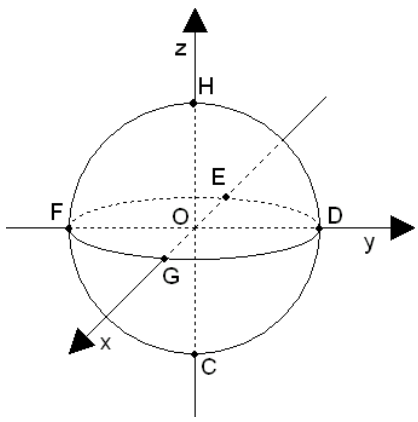
b1) Os vectores $\vec{n}_\alpha = (5, 1, -3)$ e $\vec{n}_{\pi_k} = (k, 3 - 5k, 1)$ (não nulos) são normais, respectivamente aos planos referidos. Ora, $\vec{n}_\alpha . \vec{n}_{\pi_k} = 5k + 3 - 5k - 3 = 0, \forall k \in IR$. Logo, sendo perpendiculares estes dois vectores para todo o k real, os planos são perpendiculares qualquer se seja k.

b2) Para que um desses planos seja o plano mediador do segmento [OA], o ponto A tem de pertencer a esse plano e os vectores $\vec{n}_{\pi_k} = (k, 3 - 5k, 1)$ e $\overrightarrow{OA} = (1, -2, 1)$ têm de ser colineares. Ora,

$$\begin{cases} k - 2.(3 - 5k) + 1 = 0 \\ \dfrac{k}{1} = \dfrac{3 - 5k}{-2} = \dfrac{1}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{5}{11} \\ k = 1 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \varnothing$$

Logo, não existe qualquer $k \in IR$ que verifique a condição formulada.

13.



a) Os três eixos coordenados intersectam essa superfície esférica em seis pontos (dois por eixo), sendo quaisquer três deles não colineares. Portanto, escolhidos quaisquer 3 desses pontos eles definem um triângulo. Se se der ao trabalho, poderá confirmar que com esses 6 pontos se podem definir 20 triângulos distintos (basta contar os subconjuntos de $\{C, D, E, F.G, H\}$ com três elementos). Desses 20 triângulos, apenas 4 deles ([DEF], [DEG], DFG] e [EFG]) estão contidos no plano definido por $z = 0$.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \dfrac{4}{20} = 20\%$.

b) Basta mostrar que o ponto A pertence a esse plano e que o vector $\overrightarrow{OA}$ é normal ao plano. O que se verifica:

Ora, $4 \times 4 + 3 \times 3 = 25 \Leftrightarrow 25 = 25$, logo A pertence ao plano considerado;

Como $\overrightarrow{OA} = (0, 4, 3) = \vec{n}_\alpha$, sendo $\vec{n}_\alpha$ um vector normal ao plano α, então também $\overrightarrow{OA}$ é normal ao plano.

c) As coordenadas do ponto C são tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 25 \wedge x = 0 \wedge y = 0 \wedge z < 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0 \wedge z = -5$, pois C pertence à superfície esférica e ao semieixo negativo Oz. Logo, $C\,(0, 0, -5)$.

Como a recta BC pode ser definida por $x = 0 \quad \wedge \quad \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-8}$, pois BC: $(x, y, z) = (0, 0, 5) + k(0, 4, -8),\ k \in IR$, temos:

$$\begin{matrix}(2)\\ \\ (1)\end{matrix}\begin{cases}4y + 3z = 25\\ x = 0\\ -8y - 4z = 20\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2z = 70\\ x = 0\\ 4y + 3z = 25\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ z = 35\\ y = -20\end{cases}$$

Logo, o ponto pedido tem coordenadas $(0, -20, 35)$.

d) Ora, $\cos(A\hat{C}B) = \frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|.\|\overrightarrow{CB}\|} = \frac{(0, 4, 8).(0, -4, 8)}{\sqrt{16+64} \times \sqrt{16+64}} = \frac{-16+64}{80} = \frac{3}{5}$. Como o ângulo é agudo (porquê), então $sen\,(A\hat{C}B) = +\sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = \frac{4}{5}$ e, portanto, $tg\,(A\hat{C}B) = \frac{4}{5} \div \frac{3}{5} = \frac{4}{3}$.

14.

a) O arco CAB é um arco de semicircunferência, logo o ângulo inscrito CAB é recto. Assim, as rectas concorrentes AC e AB são perpendiculares.

b) Uma equação vectorial da recta *r* é $(x, y, z) = (0, 5, 0) + k(0, 0, 1),\ k \in IR$.

c) Como a recta *r* é perpendicular ao plano *xOy*, é perpendicular a todas rectas desse plano e, particularmente, à recta AC. Logo o vector $\overrightarrow{AC}$ é perpendicular à recta *r*. (1)

Já justificámos na alínea a) que a rectas AC e AB são perpendiculares. Logo o vector $\overrightarrow{AC}$ é perpendicular à recta AB. (2)

Portanto, por (1) e (2), podemos concluir que o vector $\overrightarrow{AC}$ é perpendicular ao plano ABD, pois é perpendicular a duas rectas concorrentes desse plano.

Um vector normal ao plano é $\overrightarrow{AC} = (-4, -8, 0)$, pelo que a equação procurada é do tipo $-4x - 8y + d = 0$. Dado que o ponto $B\,(0, 5, 0)$ é um ponto desse plano, então as suas coordenadas têm de verificar a equação anterior. Assim, como $0 - 40 + d = 0 \Leftrightarrow d = 40$, uma equação do plano considerado é $x + 2y - 10 = 0$.

d) O volume do cilindro é dado por $V = \pi \times \overline{OB}^2 \times \overline{BD}$.

Considerando o triângulo rectângulo [OBD], temos $tg\,\alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \overline{OB}.tg\,\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Assim, vem $V(\alpha) = \pi \times \overline{OB}^2 \times \overline{OB} \times tg\,\alpha = 125.\pi.tg\,\alpha$, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, sendo $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} V(\alpha) = +\infty$, pois $\lim\limits_{\alpha \to \frac{\pi}{2}^-} tg\,\alpha = +\infty$. Podemos fazer a seguinte interpretação: o volume do cilindro pode ser tão grande quanto se queira, desde que o ângulo BOD se aproxime suficientemente do ângulo recto.

15.

a) Como sabemos, um hexágono regular pode ser circunscrito por uma circunferência de raio igual ao lado do hexágono. Designando por Q o ponto de intersecção da aresta [AB] com o eixo Ox, podemos considerar o triângulo rectângulo [OQB], onde $\overline{QB} = 2$ e $\overline{OB} = 4$. Assim, $\overline{OQ} = \sqrt{4^2 - 2^2} = \sqrt{12}$ e, portanto, $B(\sqrt{12}, 2, 0)$.

Ora, $F = B + \overrightarrow{BF}$, donde $F = (\sqrt{12}, 2, 0) + (0, 0, 12) = (\sqrt{12}, 2, 12)$. Como G é simétrico de F em relação ao plano *yOz*, vem $G = (-\sqrt{12}, 2, 12)$.

b) Como $D = (0, -4, 12)$, então $\overrightarrow{DG} = (-\sqrt{12}, 2, 12) - (0, -4, 12) = (-2\sqrt{3}, 6, 0)$. Assim, uma equação vectorial da recta DG pode ser $(x, y, z) = (0, -4, 12) + k(-2\sqrt{3}, 6, 0),\ k \in IR$, donde se obtém:

$z = 12 \quad \wedge \quad \frac{x}{\underset{(-\sqrt{3})}{-2\sqrt{3}}} = \frac{y+4}{\underset{(1)}{6}}$ e, portanto, $z = 12 \quad \wedge \quad \sqrt{3}x + y = -4$, c.q.m..

c) Ora, $(z = 12 \quad \wedge \quad \sqrt{3}x + y = -4) \wedge x = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow x = 2\sqrt{3} \quad \wedge \quad y = -10 \quad \wedge \quad z = 12$. Portanto, a intersecção da recta DG com o plano que contém a face [ABFE] é o ponto de coordenadas $(2\sqrt{3}, -10, 12)$.

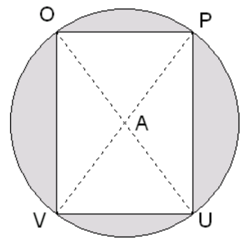
16.

a) O plano considerado intersecta o cubo segundo o rectângulo [OPUV]. Ora, as rectas UP e OT são perpendiculares, pois as diagonais da face de um cubo são perpendiculares. Por outro lado, a recta UV é perpendicular ao plano PQU, logo perpendicular à recta QT contida nesse plano.

Assim, podemos concluir que o vector $\overrightarrow{QT} = (-2, 0, 2)$ é normal ao plano PUV, pelo que a equação procurada é do tipo $-2x + 2z + d = 0$. Dado que o ponto $V\ (2, 0, 2)$ é um ponto desse plano, então as suas coordenadas têm de verificar a equação anterior. Assim, como $-4 + 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$, uma equação do plano considerado é $x - z = 0$.

b) O centro dessa superfície esférica é o centro do cubo, que designaremos por $A\ (1, 1, 1)$. Logo, o raio é $r = \overline{RA} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{3}$, c.q.m.. Portanto, essa superfície esférica pode ser definida pela equação $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

c) A área pedida corresponde à sombreada na figura ao lado, onde [OPUV] é um rectângulo inscrito num círculo de raio $\sqrt{3}$. Dado que $\overline{UV} = 2$ e $\overline{OV} = 2\sqrt{2}$, a área pedida é $A = \pi \times (\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{2} = 3\pi - 4\sqrt{2}$.



O Professor