

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

07/06/2010

Turma A - Provas 1 e 2

10.º Ano

Nome: _____	N.º: _____ Turma: _____
-------------	-------------------------

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	C	A	D	B	C
Questão	5	1	3	2	4
Prova 2	B	C	A	D	A

2.ª Parte

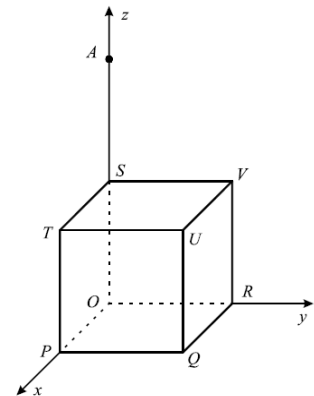
1.

a)

O cubo e a pirâmide considerados têm iguais bases e iguais alturas. Logo, a pirâmide tem a terça parte do volume do cubo, pois sabemos que $V_C = A_b \times h$ e $V_P = \frac{1}{3} A_b \times h$. Consequente, o volume do cubo é triplo do volume da pirâmide [STUVA]. Portanto, a primeira afirmação é verdadeira.

Ora, o triângulo [SUR] é equilátero, pois os seus lados são diagonais faciais do mesmo cubo. Consequentemente, o triângulo é equiângulo, sendo por isso $\widehat{SUR} = \widehat{USR} = \widehat{SRU} = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

Portanto, a segunda afirmação é falsa.



b)

O raio da esfera é $r = \frac{1}{2} \overline{UA} = \frac{1}{2} \sqrt{(0-2)^2 + (0-2)^2 + (4-2)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{12} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$ (metade da diagonal espacial do cubo: $\frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$).

O seu centro é o ponto M, ponto médio do segmento de recta [AU]: $M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{4+2}{2}\right) = (1, 1, 3)$.

Logo, a condição $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 \leq 3$ define a esfera de diâmetro [AU].

c)

Um vector director da recta é $\overline{UA} = (0, 0, 4) - (2, 2, 2) = (-2, -2, 2)$.

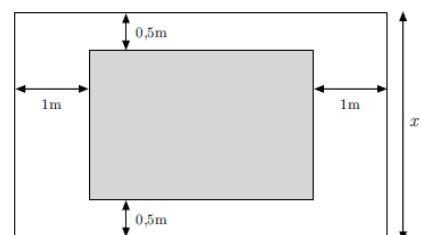
Como $V(0, 2, 2)$, então $(x, y, z) = (0, 2, 2) + k(-2, -2, 2)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta considerada.

2.

a)

Como o mural tem 26 metros de perímetro, então a medida do outro lado do mural é expresso, em metros, por $13 - x$. Consequentemente, as correspondentes medidas, em metros, dos lados da tapeçaria são expressos por $x - 0,5 - 0,5 = x - 1$ e $(13 - x) - 1 - 1 = 11 - x$.

Assim, $A(x) = (x-1)(11-x) = 11x - x^2 - 11 + x = -x^2 + 12x - 11$, com $x \in]1, 11[$.



b)

Ora,

$$\begin{aligned} A(x) &= -x^2 + 12x - 11 \\ &= -(x^2 - 12x) - 11 \\ &= -[(x-6)^2 - 36] - 11 \\ &= -(x-6)^2 + 25 \end{aligned}$$

O gráfico da função é um arco de parábola, com a concavidade voltada para baixo e com vértice $V(6, 25)$. Logo, a área da tapeçaria é máxima para $x = 6$ (metros) e a área máxima é 25 metros quadrados.

3.

a)

Como dois dos zeros da função são -2 e 3 , aplicando sucessivamente a regra de Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -5 & 1 & 21 & -18 \\ -2 & & -2 & 14 & -30 & 18 \\ \hline & 1 & -7 & 15 & -9 & 0 \\ 3 & & 3 & -12 & 9 & \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 & \end{array} \quad \text{Logo, } f(x) = (x+2)(x-3)(x^2 - 4x + 3).$$

$$\text{Ora, } x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{4 \pm 2}{2} \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

Portanto, os três zeros da função f são: -2 , 1 e 3 (duplo).

Logo, o ponto B tem abcissa 1.

$$\text{Assim, } f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)(x-3) = (x+2)(x-1)(x-3)^2.$$

b)

Elaborando uma tabela de sinal da função, obtemos:

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$
$(x+2)$	-	0	+	+	+	+	+
$(x-1)$	-	-	-	0	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$f(x)$	+	0	-	0	+	0	+

$$\text{Logo, } f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-2, 1[.$$

Portanto, $S =]-2, 1[$, sendo -2 e 1 os dois menores zeros da função f .

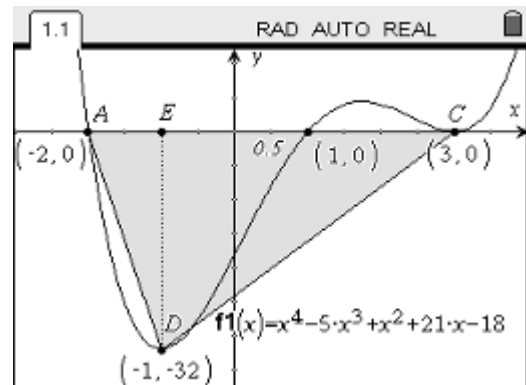
c)

Com a ferramenta adequada, determinou-se o mínimo absoluto da função: $y_{\min} = -32$, obtido para $x = -1$.

Logo, $D(-1, -32)$.

Seja E a projecção ortogonal do ponto D sobre o eixo Ox.

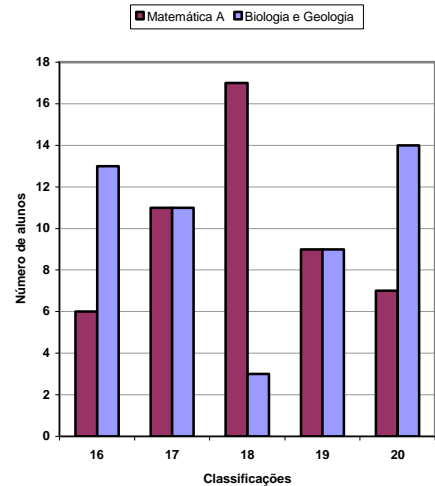
$$\text{Assim, } A_{ACD} = \frac{AC \times DE}{2} = \frac{5 \times 32}{2} = 80.$$



4.

a)

Matemática A				
Classificação	n_i	N_i	f_i	F_i
16	6	6	12%	12%
17	11	17	22%	34%
18	17	34	34%	68%
19	9	43	18%	86%
20	7	50	14%	100%
TOTAL	50		100%	



b)

b1)

$$\bar{x}_M = \frac{6 \times 16 + 11 \times 17 + 17 \times 18 + 9 \times 19 + 7 \times 20}{50} = \frac{900}{50} = 18$$

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{6 \times (16 - 18)^2 + 11 \times (17 - 18)^2 + 17 \times (18 - 18)^2 + 9 \times (19 - 18)^2 + 7 \times (20 - 18)^2}{50}} = \sqrt{\frac{72}{50}} = 1,2$$

Relativamente à disciplina de Matemática A, a média das classificações é 18 valores e o desvio padrão 1,2 valores.

b2)

Sub	List 1	List 2	List 3	List 4
1	16	13		
2	17	11		
3	18	3		
4	19	9		
5	20	14		

```

1Var XList :List1
1Var Freq  :List2
2Var XList :List1
2Var YList :List2
2Var Freq  :1

1-Variable
x      =18
Σx     =900
Σx²    =16328
σx     =1.6
sx     =1.61624407
Q1     =16
Med    =18
Q3     =20
maxX   =20
Mod    =20
    
```

Relativamente à disciplina de Biologia e Geologia, a média das classificações é 18 valores e o desvio padrão 1,6 valores.

Quanto aos quartis, obteve-se: $Q_1 = 16$, $Q_2 = Med = 18$ e $Q_3 = 20$.

FIM

- O gráfico de g pode ser obtido do gráfico de f por translação associada ao vector $\vec{u} = (3, -2)$.
Como o máximo relativo de g passa a ser 0, para $x = 7$, esta função tem menos um zero do que f . Logo, g tem dois zeros.
- A equipa realizou 18 (4+5+3+4+2) jogos.
A mediana do número de golos por jogo é $\frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{2+3}{2} = 2,5$.
A moda é efectivamente 2 golos por jogo, pois é o valor da variável com maior frequência (5 jogos).
- A equação reduzida da recta r é $y = -x + 2$.
Seja r' a recta simétrica da recta r relativamente ao eixo definido pela recta vertical de equação $x = 2$.
A recta r' contém os pontos de coordenadas (2,0) e (0,-2), logo a sua equação reduzida é $y = x - 2$.
Ora, o gráfico de g corresponde ao seguinte domínio plano: $(y = -x + 2 \vee y = x - 2) \wedge y \geq 0$.
Logo, $g(x) = \begin{cases} -x + 2 & \leftarrow x < 2 \\ x - 2 & \leftarrow x \geq 2 \end{cases}$.
- Como o conjunto solução da inequação $f(x) \geq 0$ é o intervalo $[1, 5]$, então o gráfico de f é uma parábola com a concavidade voltada para baixo, que intersecta o eixo Ox nos pontos de coordenadas (1,0) e (5,0).
Assim, o eixo de simetria desta parábola é a recta vertical de equação $x = \frac{1+5}{2} \Leftrightarrow x = 3$ e o seu vértice é $V(3, f(3))$.
Pelo exposto, conclui-se que $D'_f =]-\infty, f(3)]$.
- A secção é o rectângulo [HFBD].