

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

22/03/2010

Turma A - Provas 1 e 2

10.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2-a)	2-b)	3	4
Prova 1	C	A	B	C	D
Questão	2	4-a)	4-b)	3	1
Prova 2	B	B	D	A	C

2.ª Parte

1.

a)

A superfície esférica considerada tem centro no centro do cubo, $E(1,1,1)$, e a diagonal espacial do cubo como diâmetro.

Ora, $r = \frac{1}{2}OU = \frac{1}{2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$, pelo que uma condição que define essa superfície esférica é $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$.

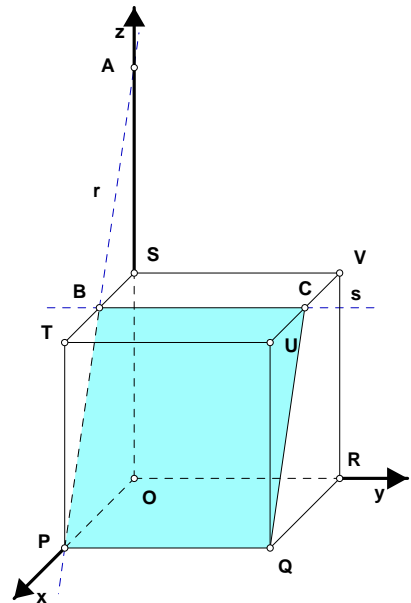
b)

A secção produzida no cubo pelo plano PQA é o rectângulo [PBCQ]. Dado que os triângulos [ABS] e [APO] são semelhantes, com razão de

semelhança $r = \frac{AS}{AO} = \frac{1}{2}$, então $BS = \frac{PO}{2} = \frac{2}{2} = 1 = \overline{TB}$.

Assim, $\overline{PB} = \overline{QC} = \sqrt{PT^2 + TB^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$.

Logo, $P_{[PBCQ]} = 2 \times (2 + \sqrt{5}) = 4 + 2\sqrt{5}$.



2.

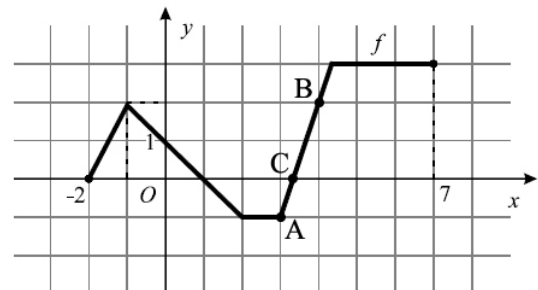
a)

Como o declive da recta AB é $m = \frac{2 - (-1)}{4 - 3} = 3$, então sua equação reduzida é da forma $y = 3x + b$.

Dado que o ponto B pertence a essa recta, as suas coordenadas têm de verificar a equação anterior. Assim, $2 = 3 \times 4 + b \Leftrightarrow b = -10$.

Logo, $y = 3x - 10$ é a equação reduzida da recta AB.

Para $y = 0$, temos: $0 = 3x - 10 \Leftrightarrow x = \frac{10}{3}$. Logo, $C(\frac{10}{3}, 0)$.



b)

x	-2		1		$\frac{10}{3}$		7
f(x)	0	+	0	-	0	+	+

c)

Por observação do gráfico, temos: $f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = 1$.

Determinemos a abscissa do ponto D da recta AB com ordenada 1:

Para $y = 1$, temos: $1 = 3x - 10 \Leftrightarrow x = \frac{11}{3}$. Logo, $D(\frac{11}{3}, 1)$.

Assim, $f(x) = f(0) \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2} \vee x = 0 \vee x = \frac{11}{3}$.

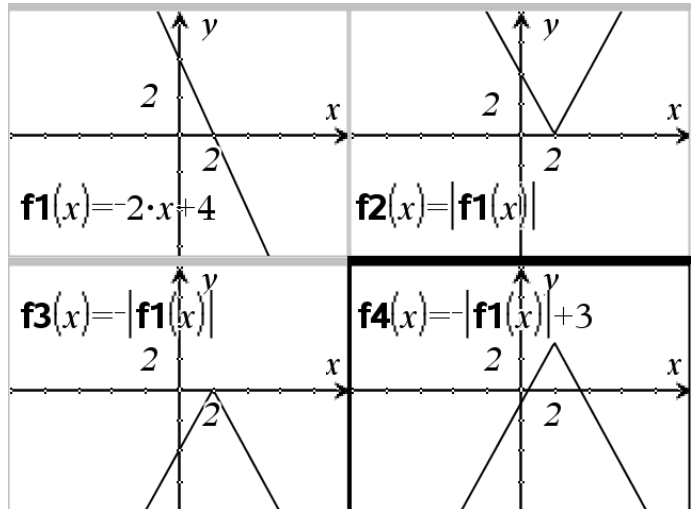
Logo, $S = \left\{ -\frac{3}{2}, 0, \frac{11}{3} \right\}$.

3.

a)

O gráfico de h está representado no ecrã seleccionado, o qual pode ser obtido do gráfico de $f_3(x) = -|f_1(x)|$ pela translação associada ao vector $\vec{u} = (0, 3)$.

O gráfico de $f_3(x) = -|f_1(x)|$ obtém-se do gráfico de $f_2(x) = |f_1(x)| = |-2x + 4|$ por simetria em relação ao eixo Ox.



b)

$$\begin{aligned} h(x) < -2 &\Leftrightarrow -|-2x + 4| + 3 < -2 \\ &\Leftrightarrow |-2x + 4| > 3 + 2 \\ &\Leftrightarrow |-2x + 4| > 5 \\ &\Leftrightarrow -2x + 4 < -5 \vee -2x + 4 > 5 \\ &\Leftrightarrow 2x > 9 \vee 2x < -1 \\ &\Leftrightarrow x < -\frac{1}{2} \vee x > \frac{9}{2} \end{aligned}$$

c)

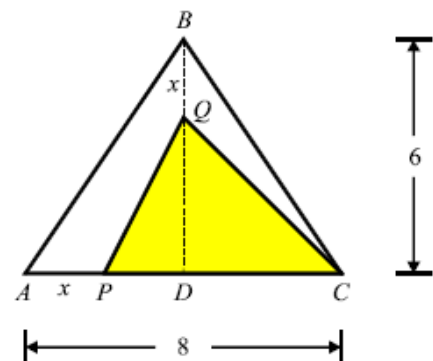
$$h(x) = -|-2x + 4| + 3 = \begin{cases} -(-2x + 4) + 3 & \Leftrightarrow -2x + 4 \geq 0 \\ -(2x - 4) + 3 & \Leftrightarrow -2x + 4 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x - 1 & \Leftrightarrow x \leq 2 \\ -2x + 7 & \Leftrightarrow x > 2 \end{cases}$$

4.

a)

Como o ponto Q se desloca sobre o segmento $[BD]$, nunca coincidindo com D, e $\overline{BD} = 6$, então $D_f = [0, 6[$.

A área do triângulo $[PQC]$ assumirá todos os valores positivos até ao valor da área do triângulo $[ABC]$. Logo, $D'_f =]0, 24]$.



b)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\overline{PC} \times \overline{QD}}{2} \\ &= \frac{(8-x)(6-x)}{2} \\ &= \frac{48 - 8x - 6x + x^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 7x + 24 \end{aligned}$$

c)

Temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - 7x + 24 \\ &= \frac{1}{2}(x^2 - 14x) + 24 \\ &= \frac{1}{2}[(x-7)^2 - 49] + 24 \\ &= \frac{1}{2}(x-7)^2 - \frac{49}{2} + \frac{48}{2} \\ &= \frac{1}{2}(x-7)^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

d)

A área do triângulo [ABC] é

$$A_{[ABC]} = \frac{6 \times 8}{2} = 24.$$

Logo, o problema pode ser equacionado pela condição $f(x) = 12$, com $x \in [0, 6[$.

Definidas as funções

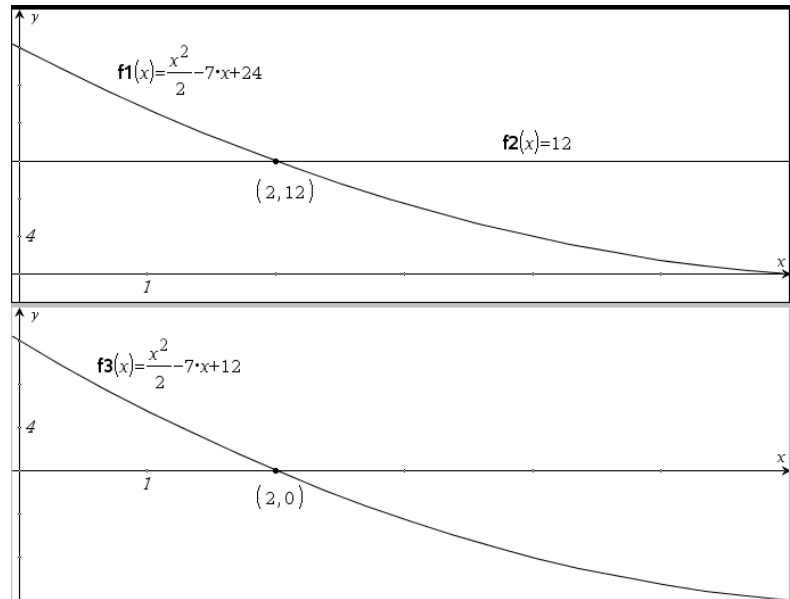
$$f_1(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 24 \text{ e } f_2(x) = 12,$$

determinou-se, com a ferramenta adequada, as coordenadas do ponto de intersecção dos seus gráficos, no domínio considerado. Logo, o valor procurado é $x = 2$.

Alternativa:

Como $f(x) = 12 \Leftrightarrow f(x) - 12 = 0$, bastaria procurar o zero da função

$f_3(x) = \frac{1}{2}x^2 - 7x + 12$ no domínio considerado.



FIM

- (1) Note que a recta AB tem declive 1 e -3 como ordenada na origem. Logo, a sua equação reduzida é $y = x - 3$. Em caso de subsistir dúvida, contacte o seu professor.
- (2) Note que $\overline{AD} - 2\overline{CO} + \overline{CB} = (\overline{AD} + \overline{CB}) - 2\overline{CO} = \vec{0} + 2\overline{OC} = \overline{AC}$. Logo, $\|\overline{AD} - 2\overline{CO} + \overline{CB}\| = \|\overline{AC}\| = 12\sqrt{2}$.
- (3) Note que a mediatriz de [CD] é a recta bissectriz dos quadrantes pares.
- (4) Em caso de subsistir dúvida, contacte o seu professor.
- (5) Note que o gráfico de g pode ser obtido por uma translação associada ao vector $\vec{u} = (4, 7)$ do gráfico que se obtém por uma simetria do gráfico de f em relação ao eixo Ox .