Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

09/12/2009 **Turma A - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

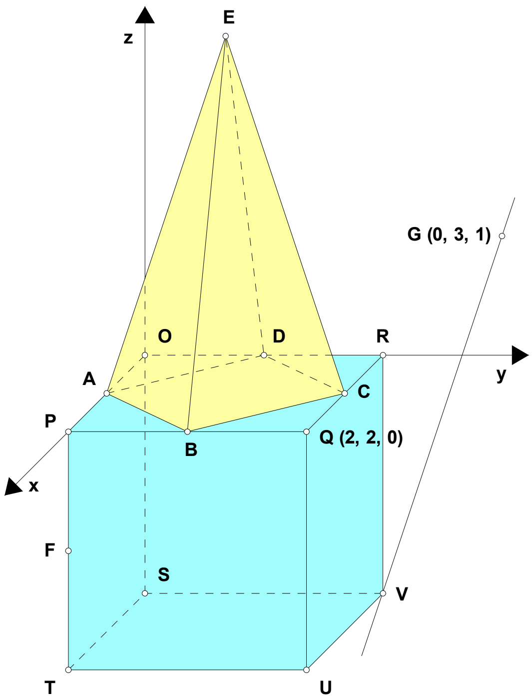
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1-a)*	*1-b)*	*2*	*3*	*4*
Prova 1	**B**	**B**	**D**	**C**	**A**
Questão	*2-a)*	*2-b)*	*1*	*4*	*3*
Prova 2	**D**	**A**	**C**	**D**	**B**

2.ª Parte

1.



a)

As coordenadas pedidas são: $A\,(1, 0, 0)$, $F\,(2, 0, -1)$, $U\,(2, 2, -2)$ e $V\,(0, 2, -2)$.

b)

As rectas _TU_ e _RV_ são não complanares.

As rectas _AE_ e _BE_ são concorrentes oblíquas.

A recta _RQ_ é perpendicular ao plano _PQU_.

A intersecção dos planos CRS e PTU é __a recta QT__.

A distância de F ao plano *yOz* é _2_ unidades e ao plano de equação $x = -2$ é _4_ unidades.

c1)

Uma condição cartesiana que caracteriza o plano ABC é $z = 0$.

c2)

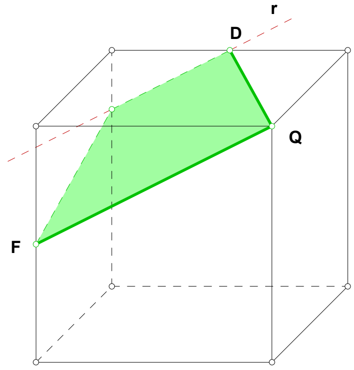
Uma condição cartesiana que caracteriza o segmento de recta [FP] é $x = 2 \wedge y = 0 \wedge -1 \leq z \leq 0$.

c3)

Uma condição cartesiana que caracteriza a face [STUV] é $0 \leq x \leq 2 \wedge 0 \leq y \leq 2 \wedge z = -2$.

d)

Como G e V são pontos de abcissa nula, então são pontos do plano coordenado *yOz*. Consequentemente, a recta GV é uma recta do plano *yOz*. A recta QR, perpendicular ao plano yOz, intersecta este plano no ponto R (não pertencente à recta GV), logo as rectas QR e GV não são concorrentes. Sendo a recta QR perpendicular ao plano *yOz*, então é perpendicular à recta GV, pois esta é uma recta deste plano. Mas estas rectas também não são paralelas, logo são não complanares.
Em conclusão, as rectas são perpendiculares não complanares.



e)

A secção produzida pelo plano FQD está desenhada na figura ao lado.
Note que as rectas r e FQ são paralelas.

f1)

Seja H (1, 1, 0) o centro da base da pirâmide.
Dado que a pirâmide é regular, então a sua altura é $h = \overline{EH}$.
Como o volume do cubo é $V_c = 2^3 = 8$, temos $V_p = V_s - V_c \Leftrightarrow V_p = 10 - 8 \Leftrightarrow V_p = 2$.

Assim, vem: $V_p = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \overline{AB}^2 \times \overline{HE} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times (\sqrt{2})^2 \times \overline{HE} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \times \cancel{2} \times \overline{HE} = \cancel{2} \Leftrightarrow \overline{HE} = 3$.

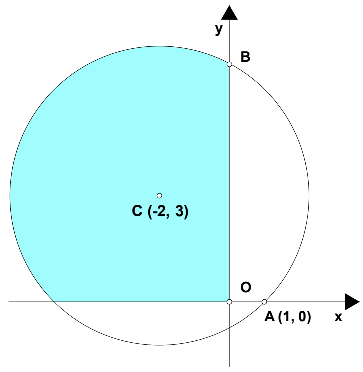
Logo, o ponto E tem de coordenadas (1, 1, 3).

f2)

As quatro faces laterais da pirâmide são triângulos isósceles geometricamente iguais.
Considerando que $A\,(1, 0, 0)$ e $H\,(1, 1, 3)$, então $\overline{AE} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{10}$.
Designando por M o ponto médio do segmento de recta [AB] e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [AME], temos: $\overline{ME} = \sqrt{\overline{AE}^2 - \overline{AM}^2} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{10 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{19}{2}}$.

Assim, a área lateral da pirâmide é $A_{Lp} = 4 \times \frac{\overline{AB} \times \overline{ME}}{2} = 4 \times \frac{\cancel{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{19}}{\cancel{\sqrt{2}}}}{2} = 2\sqrt{19}$.

2.



a)

O ponto simétrico de C em relação ao eixo *Ox* tem de coordenadas $(-2, -3)$. Assim, temos:

$$\begin{cases} \frac{1-m}{2} = -2 \\ 2n = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m = -4 \\ n = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

b)

O raio da circunferência é $r = \overline{AC} = \sqrt{(-2-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ e o seu centro é $C\,(-2, 3)$.
Assim, uma sua equação é $(x+2)^2 + (y-3)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 = 18$, c.q.m.

c)

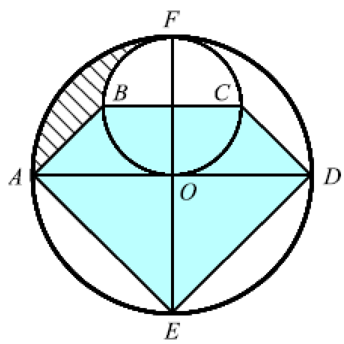
O ponto B é um ponto de abcissa nula, pois pertence ao eixo Oy.
Como B é um ponto da circunferência, as suas coordenadas terão de verificar a equação da circunferência.
Assim, vem: $(0+2)^2 + (y-3)^2 = 18 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 14 \Leftrightarrow y - 3 = \pm\sqrt{14} \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{14}$.
Como o ponto pretendido (intersecção da circunferência com o semi-eixo positivo das ordenadas) tem ordenada positiva, conclui-se que $B\,(0, 3+\sqrt{14})$.

d)

Uma condição que caracteriza o domínio plano colorido (incluindo a fronteira) é:

$$(x+2)^2 + (y-3)^2 \le 18 \quad \wedge \quad x \le 0 \quad \wedge \quad y \ge 0).$$

3.



a)

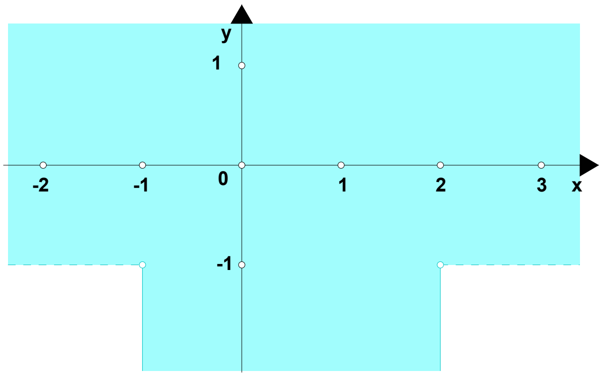
$$\begin{aligned} A_{[ABCDE]} &= A_{[ADE]} + A_{[ABCD]} \\ &= \frac{\overline{AD} \times \overline{OE}}{2} + \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2} \times \frac{\overline{FO}}{2} = \frac{2r \times r}{2} + \frac{2r + r}{2} \times \frac{r}{2} = r^2 + \frac{3r^2}{4} = \frac{7}{4} r^2 \end{aligned}$$

b)

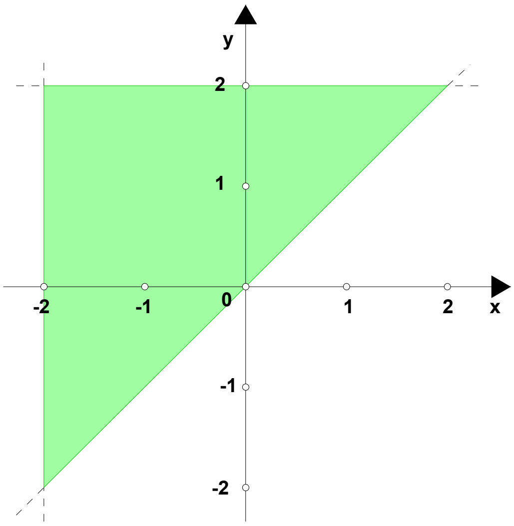
$$\begin{aligned} P_T &= \frac{P_{Circulo\,G}}{4} + \frac{P_{Circulo\,P}}{4} + \overline{AB} \\ &= \frac{2\pi \times 4}{4} + \frac{2\pi \times 2}{4} + \frac{\overline{AF}}{2} \\ &= 2\pi + \pi + \frac{4\sqrt{2}}{2} \\ &= 3\pi + 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

4.

A) $-1 \leq x \leq 2 \quad \vee \quad y > -1$



B) $y \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq -2 \quad \wedge \quad y \geq x$



---

(1) O segmento de recta considerado é [AC], que é uma diagonal facial do cubo.

(2) A secção produzida no cubo pelo plano ABG é o rectângulo [ABGH].

(3) A distância do ponto P ao ponto O começa por ir diminuindo com o decorrer do tempo e atinge o mínimo, não nulo, quando o ponto P coincide com o ponto médio de [RS]. Tal permite excluir duas alternativas.
No trajecto do ponto médio de [RS] até S, a distância do ponto P ao ponto O vai aumentando, atingindo em S a mesma distância a que se encontrava de O no momento inicial. Depois, durante o trajecto no arco ST essa distância não se altera. Tal permite excluir uma das duas restantes alternativas.

(4) Tenha em atenção que $\sim (x < -2 \vee y > 3) \Leftrightarrow x \geq -2 \wedge y \leq 3$.

(5) Se a diagonal facial de um cubo tem $5\sqrt{2}\ cm$ de comprimento, então o comprimento do seu lado é $\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5\ cm$. Por isso, o perímetro da base do cubo é 20 *cm*.