Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

16/11/2009 **Turma A - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

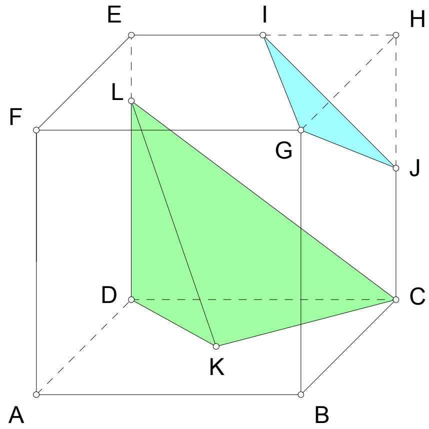
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**D**	**C**	**A**	**D**
Questão	*4*	*1*	*5*	*2*	*3*
Prova 2	**C**	**B**	**D**	**C**	**A**

2.ª Parte

1.



a)
As rectas BG e DK são concorrentes perpendiculares.
As rectas CL e IJ são concorrentes oblíquas.
As rectas EF e GJ são não complanares.

b)
O triângulo [AEC] é equilátero, pois os seus lados são diagonais faciais do cubo. Sendo equilátero, o triângulo é também equiângulo e, portanto, $A\hat{E}C = E\hat{C}A = C\hat{A}E = 60^\circ$.
A recta ED é perpendicular ao plano que contém a face [ABCD] do cubo. Consequentemente, é perpendicular à recta DK pertencente a esse plano, pois uma recta perpendicular a um plano é perpendicular a todas as rectas desse plano. Assim, $K\hat{D}L = 90^\circ$.

c)
Seja M o ponto médio de [CD].

Ora, $V_P = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{CD} \times \overline{MK}}{2} \times \overline{DL} = \frac{1}{\cancel{3}} \times \frac{a \times \frac{a}{2}}{2} \times \frac{\cancel{3}}{4} a = \frac{a^2}{4} \times \frac{a}{4} = \frac{a^3}{16}$.

Logo, $\frac{V_P}{V_C} = \frac{\frac{a^3}{16}}{a^3} = \frac{1}{16}$.

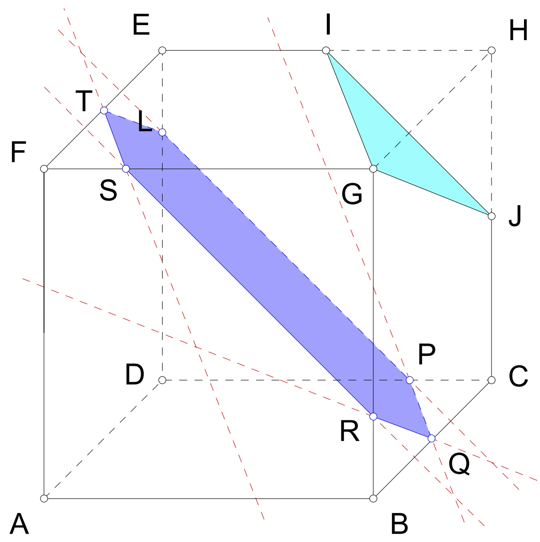
Nota: Repare que a área do triângulo [CDK] é a quarta parte da base do cubo, isto é, $A_b = \frac{a^2}{4}$. (Porquê?)

d)
O ponto K é o ponto de intersecção das diagonais [AC] e [BD], que se bissectam.
Assim, $\overline{DK} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2} \times \sqrt{8^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2 \times 8^2} = \frac{1}{2} \times 8\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$ cm.
Dado que o triângulo [DLK] é rectângulo em D (ver alínea b)), temos:
$A_{[DLK]} = \frac{\overline{DK} \times \overline{DL}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 6}{2} = 12\sqrt{2}$ cm^2.

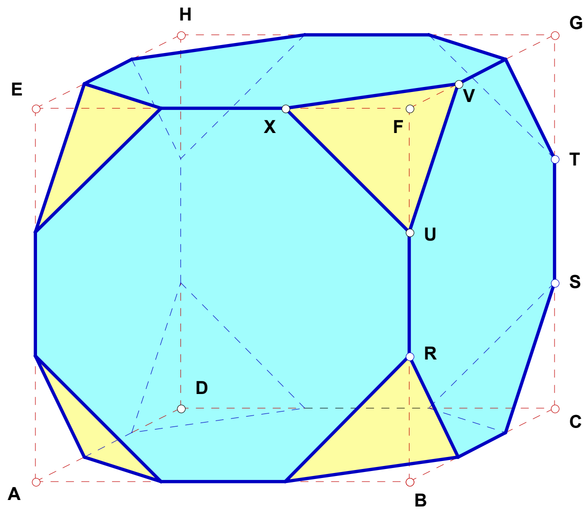
e)

Um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas. Assim, o plano que contém a face [CDEH] intersecta os planos GIJ e β segundo rectas paralelas. Por isso, traçou-se uma recta paralela a IJ e passando por L, que é a recta de intersecção do plano β com o plano da face [CDEH]. Consequentemente, o segmento [LP] é a intersecção de β com essa face do cubo.

Dado que o plano β intersecta as faces paralelas do cubo segundo segmentos paralelos, determinaram-se sucessivamente os pontos Q, R, S e T, assim como as respectivas secções nas faces.
Conclui-se, portanto, que a secção pedida é o hexágono irregular [PQRSTL].



2.



a)

Tendo em conta que a diagonal [US] é também diagonal do rectângulo [RSTU], o seu comprimento é

$\overline{US} = \sqrt{\overline{UR}^2 + \overline{RS}^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ cm.

As arestas são de dois tipos: umas são geometricamente iguais ao segmento [UR], de comprimento 2 centímetros; as outras são geometricamente iguais ao segmento [UV], de comprimento $\overline{UV} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2^2 \times 2} = 2\sqrt{2}$ cm.

b)

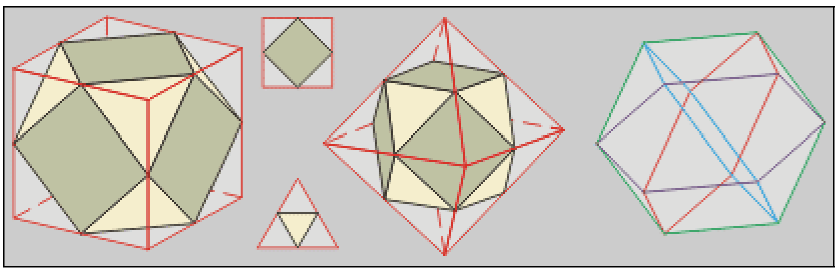
O volume pedido pode ser obtido pela diferença entre os volumes do paralelepípedo rectângulo de base [ABCD] e altura [BU] e de quatro das oito pirâmides congruentes que se destacaram do cubo.
Assim, vem:

$$\begin{aligned} V &= V_{Paralelepípedo} - 4 \times V_{[FUXV]} \\ &= \overline{AB} \times \overline{BC} \times \overline{BU} - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\overline{XF} \times \overline{FU}}{2} \times \overline{FV} \\ &= 6 \times 6 \times 4 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{2 \times 2}{2} \times 2 \\ &= 144 - \frac{16}{3} \\ &= \frac{416}{3} \end{aligned}$$

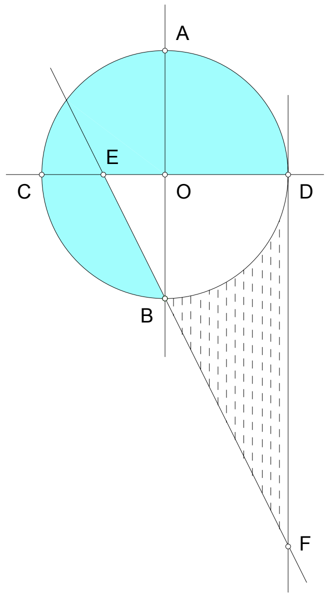
Portanto, o volume da água contida no copo é $\frac{416}{3}$ cm^3.

c)

Para $x = 3$, o ponto X coincidirá com o ponto médio da aresta [EF], ocorrendo o mesmo com os outros pontos correspondentes nas restantes 11 arestas do cubo. Desta forma, os octógonos transformam-se em quadrados
O novo poliedro obtido (cuboctaedro) tem também 14 faces: 8 triângulos equiláteros e 6 quadrados.
As faces triangulares têm por vértices os pontos médios das arestas convergentes num mesmo vértice do cubo e as faces quadradas têm por vértices os pontos médios das arestas pertencentes à mesma face.



3.



a)

Os triângulos [BEO] e [FED] são ambos triângulos rectângulos e possuem um ângulo comum: $\sphericalangle BEO$. Assim, estes triângulos são semelhantes, pois existem dois pares de ângulos iguais, cada um a cada um, de um para o outro triângulo.

Logo, $\frac{\overline{DF}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{OE}} \Leftrightarrow \overline{DF}=\frac{3\times\overline{OE}}{\overline{OE}}\times\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{DF}=3\times\overline{OA}$, c.q.m..

b)

$$A_S=\frac{3}{4}A_{Círculo}-A_{[BEO]}=\frac{3}{4}\times\pi r^2-\frac{r\times\frac{r}{2}}{2}=\frac{3\pi r^2}{4}-\frac{r^2}{4}=\frac{3\pi r^2-r^2}{4}=\frac{3\pi-1}{4}r^2 .$$

c)

$$\begin{aligned}
P_T &= \frac{P_{Círculo}}{4}+\overline{DF}+\overline{BF}\\
&= \frac{P_{Círculo}}{4}+\overline{DF}+\overline{FE}-\overline{BE}\\
&= \frac{2\pi\times 2}{4}+6+\sqrt{6^2+3^2}-\sqrt{2^2+1^2}\\
&= \pi+6+\sqrt{45}-\sqrt{5}\\
&= \pi+6+3\sqrt{5}-\sqrt{5}\\
&= (\pi+6+2\sqrt{5})\ cm
\end{aligned}$$

4.

$$\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{32}-\frac{\sqrt{27}}{4}=\frac{\sqrt[4]{6^2}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{4^2\times 2}-\frac{\sqrt{3^2\times 3}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+2\times 4\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}+8\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+8\sqrt{2} .$$

FIM

---

(1) $A=\pi\times 1^2-2\times\pi\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$

(2) Quando o ponto P se desloca de B até C, a distância ao ponto A vai aumentando. Logo, podemos eliminar duas alternativas. Quando o ponto P se desloca de C até D, a distância ao ponto E vai diminuindo, igualando, em D, a distância a que se encontrava no início do percurso. Seguidamente, essa distância aumenta permanentemente. Esta constatação permite eliminar uma das duas alternativas restantes.

(3) Sendo os triângulos [ABC] e [ABD] equiláteros e geometricamente iguais e M é o ponto médio de [AB], então as alturas desses triângulos relativamente à base [AB] são iguais, isto é, $\overline{CM}=\overline{DM}$. Também, $\overline{CM}=\overline{DM}<\overline{CD}$. Logo, o triângulo [MCD] é estritamente isósceles.

(4) Se a base tem *n* vértices, a pirâmide tem;
- *n* faces laterais e *n* arestas laterais;
- *n* arestas na base.

Logo, tem *n+1* faces e *2n* arestas..

(5) Em caso de dúvida, opte por recortar a planificação e construa o cubo.