Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

09/11/2009 **Turma A - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

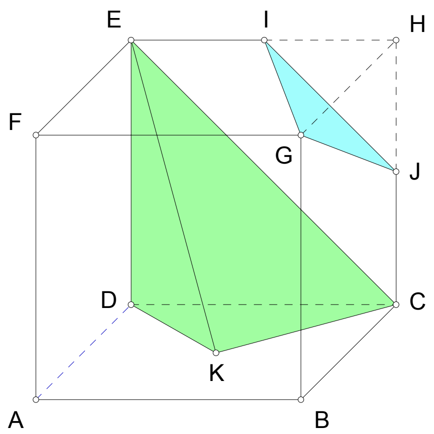
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**A**	**D**	**B**	**C**	**C**
Questão	*3*	*2*	*4*	*5*	*1*
Prova 2	**B**	**A**	**D**	**A**	**B**

2.ª Parte

1.



a)

As rectas AB e IG são não complanares.
As rectas EC e IJ são estritamente paralelas.
As rectas AF e CK são concorrentes perpendiculares.

b)

O centro da face [ABCD] é a intersecção das suas diagonais [AC] e [BD]. Por outro lado, o triângulo [ACD] é rectângulo isósceles. Por isso, $D\hat{C}A = C\hat{A}D = 45°$ e, portanto, $D\hat{C}K = D\hat{C}A = 45°$.
O triângulo [BFD] é equilátero, pois os seus lados são diagonais faciais do cubo. Sendo equilátero, o triângulo é também equiângulo e, portanto, $B\hat{F}D = F\hat{D}B = D\hat{B}F = 60°$.

c)

Seja M o ponto médio de [CD].

Ora, $V_P = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{CD} \times \overline{MK}}{2} \times \overline{DE} = \frac{1}{3} \times \frac{a \times \frac{a}{2}}{2} \times a = \frac{a^3}{12}$.

Logo, $\frac{V_P}{V_C} = \frac{\frac{a^3}{12}}{a^3} = \frac{1}{12}$.

Nota: Repare que a área do triângulo [CDK] é a quarta parte da base do cubo, isto é, $A_b = \frac{a^2}{4}$. (Porquê?)

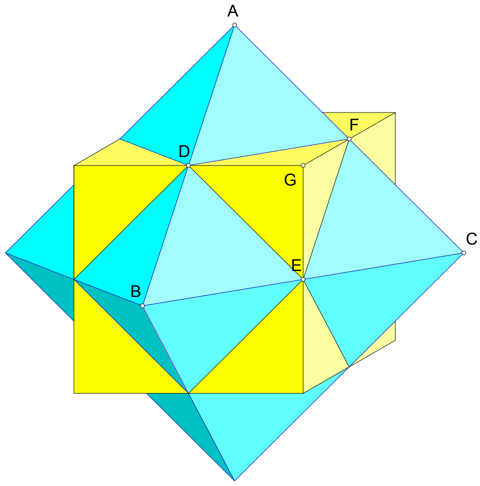
d1)

Aplicando o Teorema de Pitágoras nos triângulos rectângulos [IGH], [JGH] e [IHJ], temos:
$\overline{IG} = \overline{JG} = \sqrt{\overline{GH}^2 + \overline{HJ}^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$ e $\overline{IJ} = \sqrt{\overline{IH}^2 + \overline{HJ}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$.
Logo, o perímetro pedido é $P = 2 \times 4\sqrt{5} + 4\sqrt{2} = 4(2\sqrt{5} + \sqrt{2})$ centímetros.

d2) Sendo N o ponto médio do lado [JI] do triângulo isósceles [GIJ] e aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [GJN], vem: $\overline{GN} = \sqrt{\overline{GJ}^2 - \overline{JN}^2} = \sqrt{\left(4\sqrt{5}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{80-8} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$.

Assim, a área pedida é $A = \frac{\overline{JI} \times \overline{GN}}{2} = \frac{4\sqrt{2} \times 6\sqrt{2}}{2} = \frac{24 \times 2}{2} = 24$ centímetros quadrados.

2.



a)

Sendo regular o octaedro, as suas oitos faces são triângulos equiláteros (equiângulos, também) geometricamente iguais.
Por outro lado, dado que D e F são os pontos médios de [AB] e [AC], então $\overline{AD} = \overline{AF}$. Como num triângulo, a lados iguais opõem-se ângulos iguais, e porque a amplitude do ângulo BAC é 60º, então o triângulo [DAF] é equiângulo e, por isso, é equilátero.
Sendo equiláteros os triângulos [ADF] e [ABC], então eles são semelhantes. Logo, $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{BC}}$.

Como $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AD}}{2 \times \overline{AD}} = \dfrac{1}{2}$, então $\dfrac{1}{2} = \dfrac{\overline{DF}}{\overline{BC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = 2 \times \overline{DF}$.

Assim, $\overline{BC} = 2 \times \sqrt{3^2 + 3^2} = 2\sqrt{18} = 6\sqrt{2}$.

Portanto, a aresta do octaedro tem $6\sqrt{2}\ cm$ de comprimento.
(O comprimento da diagonal facial do cubo, como a figura sugere.)

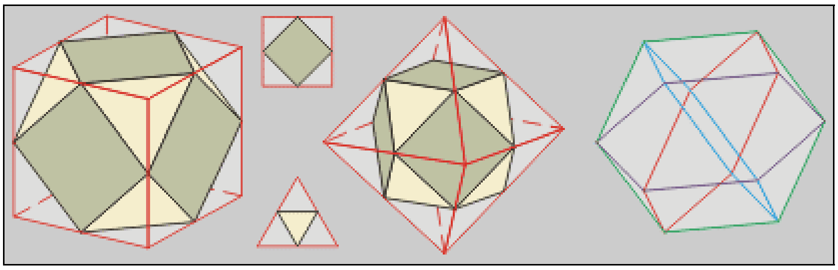
b)

Comecemos por determinar o volume da pirâmide [DGEF]: $V_P = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{\overline{DG} \times \overline{GE}}{2} \times \overline{GF} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3 \times 3}{2} \times 3 = \dfrac{9}{2}\ cm^3$.

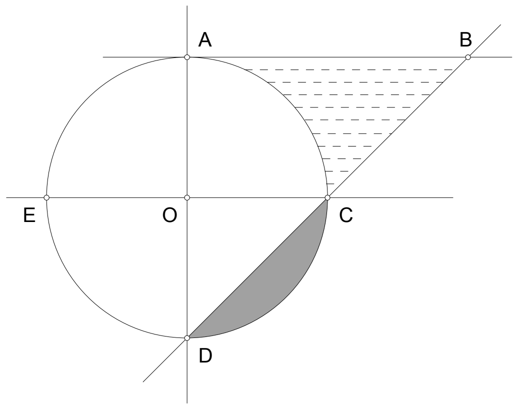
Logo, o volume da parte do cubo exterior ao octaedro é $V = 8 \times V_P = 8 \times \dfrac{9}{2} = 36\ cm^3$.

c)

Esse sólido (cuboctaedro) tem 14 faces: 8 triângulos equiláteros e 6 quadrados.
As faces triangulares são geometricamente iguais ao triângulo [DEF], uma das quais é este triângulo e as restantes sete são as bases das outras pirâmides geometricamente iguais à pirâmide [DGEF], que emergem do octaedro através das suas oito faces.
As seis faces quadradas são as bases das pirâmides que emergem do cubo através das suas seis faces.



3.



a)

Dado que o triângulo rectângulo [COD] é isósceles, então $C\hat{D}A = 45^\circ$. Como este ângulo é comum ao triângulo rectângulo [ABD], então este é também isósceles.
Assim, será $\overline{AB} = \overline{AD} = 2 \times \overline{AO}$.

b)

$$A_S = \frac{A_{Círculo}}{4} - A_{[COD]} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r \times r}{2} = \frac{\pi r^2}{4} - \frac{2r^2}{4} = \frac{\pi - 2}{4} r^2 .$$

c)

$$A_T = A_{Trapézio} - \frac{A_{Círculo}}{4} = \frac{12+6}{2} \times 6 - \frac{\pi \times 6^2}{4} = 54 - 9\pi = 9(6-\pi)\ cm^2 .$$

d)

Se o círculo tem π metros de perímetro, então o seu raio é meio metro.

Assim, $\Phi = \overline{PO} + \overline{OB} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\overline{OA}^2 + \overline{AB}^2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{1}{2} + \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

4.

A)

$$\Phi^{-1}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}=\frac{2}{1+\sqrt{5}}\times\frac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}=\frac{2-2\sqrt{5}}{1^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{2-2\sqrt{5}}{1-5}=\frac{2\sqrt{5}-2}{4}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$ Note que $(A+B)(A-B)=A^2-B^2$.

B)

$$\frac{\sqrt[4]{36}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{32}-\frac{\sqrt{27}}{4}=\frac{\sqrt[4]{6^2}}{\sqrt{2}}+2\sqrt{4^2\times 2}-\frac{\sqrt{3^2\times 3}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}+2\times 4\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}+8\sqrt{2}-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}+8\sqrt{2}.$$

---

(1) Designando por *r* o raio das esferas, a tira vermelha tem de comprimento $C_{vermelha}=2\pi r$ e a tira verde tem de comprimento $C_{verde}=3\times 2r=6r$. Como $\pi>3$, então $C_{vermelha}>C_{verde}$.

(2) Se cada uma das bases tem *n* vértices:
- o prisma tem *n* faces laterais e *n* arestas laterais;
- o prisma tem *n* arestas em cada uma das bases;
- o prisma tem *2n* vértices, *n* em cada uma das bases.
Logo, tem *n+3* arestas e *2n* vértices.

(3) Basta reparar que a região sombreada no cubo é constituída por três triângulos rectângulos isósceles, um em cada face, com vértices do ângulo recto no ponto F. Esta constatação elimina três das alternativas.

(4) Recorde que o tetraedro regular tem 4 faces, que são triângulos equiláteros geometricamente iguais, e 4 vértices, concorrendo em cada um deles três arestas.

(5) Quando o ponto P se desloca de A até B, a distância ao ponto E vai aumentando. Logo podemos eliminar duas alternativas. Quando o ponto P se desloca de B até C, a distância ao ponto E vai diminuindo até atingir o seu valor mínimo e, seguidamente, passa a aumentar. Esta constatação permite eliminar uma das duas alternativas restantes.