TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

GRUPO I

1. Como a recta r passa nos pontos $A(4,0)$ e $B(0,8)$, um vector director da recta r é $\overrightarrow{AB} = (0,8) - (4,0) = (-4,8)$

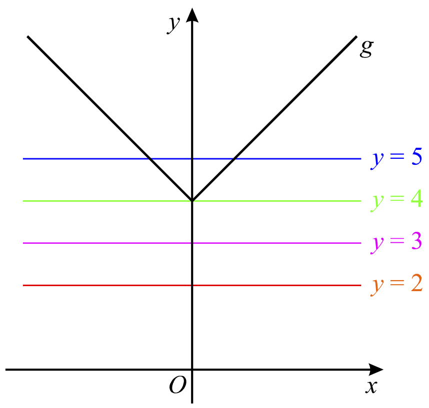
Vem, então, que o declive da recta r é $\frac{8}{-4} = -2$

Como a recta r intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 8, tem-se que a ordenada na origem da recta r é igual a 8

Portanto, a equação reduzida da recta r é $y = -2x + 8$

Resposta **C**

2. Na figura, está representada parte do gráfico da função g, bem como as rectas de equações $y=5$, $y=4$, $y=3$ e $y=2$



Como se pode observar na figura, apenas a recta de equação $y=5$ intersecta o gráfico da função g em dois pontos. Portanto, a opção correcta é a opção A.

Este item também pode ser resolvido algebricamente do seguinte modo:

$g(x) = 5 \Leftrightarrow |x| + 4 = 5 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 1$

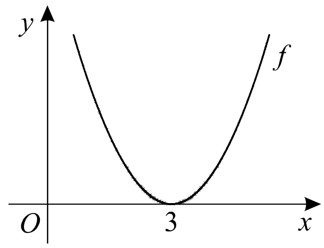
$g(x) = 4 \Leftrightarrow |x| + 4 = 4 \Leftrightarrow |x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$g(x) = 3 \Leftrightarrow |x| + 4 = 3 \Leftrightarrow |x| = -1$ equação impossível

$g(x) = 2 \Leftrightarrow |x| + 4 = 2 \Leftrightarrow |x| = -2$ equação impossível

Resposta **A**

3. O gráfico da função f é uma parábola com a concavidade voltada para cima e que intersecta o eixo Ox num único ponto.



Portanto, o contradomínio de f é $[0, +\infty[$

Resposta **D**

4. O gráfico da função h pode ser obtido deslocando o gráfico da função f uma unidade para a esquerda e uma unidade para baixo.

Resposta **C**

5. $g\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

Resposta **B**

GRUPO II

1.1. O ponto Q tem coordenadas $(7, 7, 0)$

A distância do ponto Q ao ponto O é $7\sqrt{2} = \sqrt{98}$

Assim, uma equação da superfície esférica de centro no ponto Q e que passa no ponto O é $(x-7)^2 + (y-7)^2 + z^2 = 98$

1.2. A área da base da pirâmide é $7^2 = 49$

Designando por h a altura da pirâmide, tem-se $\frac{49\,h}{3} = 196$

Vem, então: $\frac{49\,h}{3} = 196 \Leftrightarrow 49\,h = 588 \Leftrightarrow h = 12$

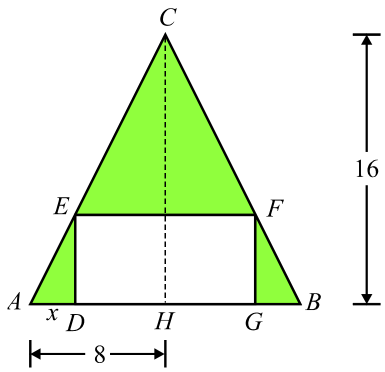
Portanto, as coordenadas do ponto W são $\left(\frac{7}{2}\,,\ \frac{7}{2}\,,\ 12\right)$

2. As funções f e g podem estar representadas graficamente na opção B.

A opção A está incorrecta, pois a Fernanda e a Gabriela percorrem a mesma distância, ao contrário do que é sugerido pelos gráficos apresentados nesta opção.

A opção C está incorrecta, pois, no instante inicial, a distância da Fernanda a casa é zero, ao contrário do que é sugerido pelo gráfico da função f apresentado nesta opção.

3.1. A área da zona relvada é dada pela diferença entre a área do triângulo $[ABC]$ e a área do rectângulo $[DEFG]$



Os triângulos $[AHC]$ e $[ADE]$ são semelhantes, pelo que, sendo $\overline{CH} = 2\,\overline{AH}$, se tem $\overline{ED} = 2\,\overline{AD}$

Portanto, $\overline{ED} = 2x$

Como $\overline{DG} = 16 - 2x$, vem que a área do rectângulo $[DEFG]$ é dada, em função de x, por $2x(16-2x)$

Então, a área da zona relvada é dada, em função de x, por

$$S(x) = \frac{16 \times 16}{2} - 2x\,(16-2x) = 4x^2 - 32x + 128$$

3.2. Tem-se:

$$4x^2 - 32x + 128 = 4\,(x^2 - 8x) + 128 =$$
$$= 4\,(x^2 - 8x + 16) - 64 + 128 = 4(x-4)^2 + 64$$

Portanto, o gráfico da função S é parte de uma parábola, com a concavidade voltada para cima, cujo vértice é o ponto de coordenadas $(4, 64)$

Assim, o valor de x para o qual a área da zona relvada é mínima é 4 e a respectiva área é 64

3.3. Uma condição que traduz o problema é $4x^2 - 32x + 128 > 68 \ \wedge\ x \in \,]0, 8[$

Tem-se: $4x^2 - 32x + 128 > 68 \Leftrightarrow 4x^2 - 32x + 60 > 0$

Ora, $4x^2 - 32x + 60 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 5$

Portanto, $4x^2 - 32x + 60 > 0 \Leftrightarrow x < 3 \ \vee\ x > 5$

Como $x \in \,]0, 8[$, o conjunto dos valores de x para os quais a área da zona relvada é superior a $68\,m^2$ é $]0,3[\,\cup\,]5,8[$

4.1. Como o gráfico da função f intersecta o eixo das abcissas em quatro pontos, a função f tem quatro zeros. Como um dos pontos tem abcissa -1 e outro tem abcissa 2, dois dos quatro zeros da função f são -1 e 2

Portanto, o polinómio $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ é divisível por $(x+1)(x-2)$

Determinemos o quociente da divisão de $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6$ por $x+1$, utilizando a Regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & 1 & -7 & -1 & 6 \\ -1 & & -1 & 0 & 7 & -6 \\ \hline & 1 & 0 & -7 & 6 & \boxed{0} \end{array}$$

Determinemos agora o quociente da divisão de $x^3 - 7x + 6$ por $x-2$, utilizando novamente a Regra de Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 2 & & 2 & 4 & -6 \\ \hline & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

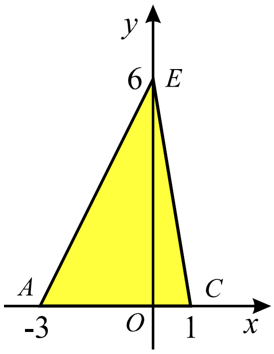
Portanto, $x^4 + x^3 - 7x^2 - x + 6 = (x+1)(x-2)(x^2+2x-3)$

Tem-se $x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1$

Portanto, os quatro zeros da função f são $-3,\ -1,\ 1$ e 2

Assim, o ponto A tem abcissa -3 e o ponto C tem abcissa 1

Como $f(0) = 6$, o ponto E tem ordenada 6

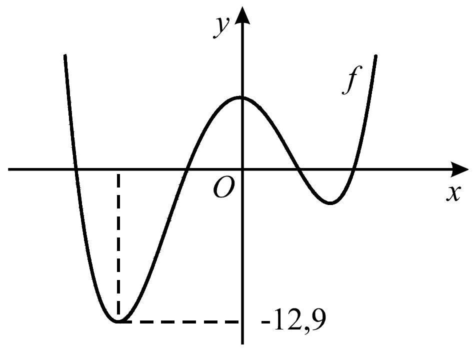


Tomando $[AC]$ como base do triângulo $[AEC]$, a altura correspondente é $[OE]$

Tem-se $\overline{AC} = 4$ e $\overline{OE} = 6$

Portanto, a área do triângulo $[AEC]$ é $\dfrac{4 \times 6}{2} = 12$

4.2. Na figura, está representada parte do gráfico da função f



Assinalou-se no gráfico o ponto de ordenada mínima.

Tem-se, $a \approx -12{,}9$