## TESTE INTERMÉDIO DE MATEMÁTICA A

## RESOLUÇÃO - VERSÃO 2

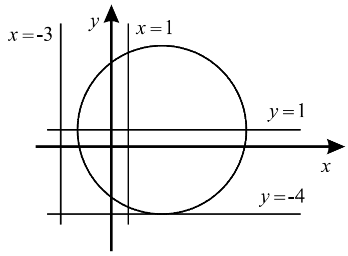
---

### GRUPO I

**1.** A recta $r$ é paralela à bissectriz dos quadrantes pares e tem ordenada na origem igual a $3$. Portanto, a sua equação reduzida é $y = -x + 3$

Resposta **B**

**2.** Na figura seguinte, está representada a circunferência de equação $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 25$, bem como as rectas de equações $x = -3$, $x = 1$, $y = -4$ e $y = 1$




Como se vê na figura, das quatro rectas, a única que é tangente à circunferência é a recta de equação $y = -4$

Resposta **C**

**3.** Uma pirâmide com 21 vértices tem por base um polígono com 20 vértices. Portanto, uma pirâmide com 21 vértices tem 20 arestas na base.

Como a cada vértice da base corresponde uma, e uma só, aresta lateral, existem também 20 arestas laterais.

Assim, uma pirâmide com 21 vértices tem, ao todo, 40 arestas.

Resposta **B**

**4.** Podemos excluir as opções B e C, uma vez que, nestas duas opções, o triângulo e o sector circular não são adjacentes, ao contrário do que acontece na planificação.

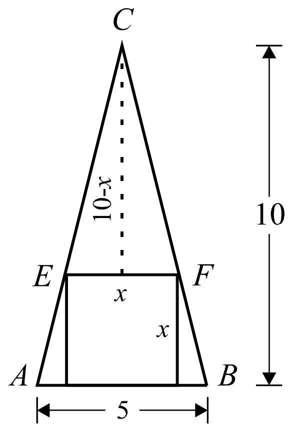
A opção A também não é a correcta, pois, nesta opção, o triângulo e o quadrado não têm um vértice em comum, ao contrário do que acontece na planificação.

Resposta **D**

**5.** Os triângulos $[ABC]$ e $[EFC]$ são semelhantes.

Como $10$ é o dobro de $5$, então, $10-x$ é o dobro de $x$, ou seja, $10-x=2x$

$10-x=2x \;\Leftrightarrow\; 3x=10 \;\Leftrightarrow\; x=\frac{10}{3}$




Resposta **B**

## GRUPO II

**1.1.** $[CD]$ é a base maior do trapézio. Como $\overline{CD}$ é igual à abcissa do ponto $D$, tem-se $\overline{CD}=6$

$[BA]$ é a base menor do trapézio. Como $\overline{BA}$ é igual à abcissa do ponto $A$, tem-se $\overline{BA}=3$

A altura do trapézio é igual à diferença entre a ordenada do ponto $D$ e a ordenada do ponto $A$, ou seja, é $10-6=4$

A área do trapézio é, portanto, $\frac{6+3}{2}\times 4=18$

**1.2.** Seja $P(x,y)$ um ponto genérico da mediatriz do segmento $[AD]$

Tem-se:

$$\overline{PA}=\overline{PD} \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-6)^2=(x-6)^2+(y-10)^2 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; x^2-6x+9+y^2-12y+36=x^2-12x+36+y^2-20y+100 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; -6x+9-12y+36=-12x+36-20y+100 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; 8y=-6x+91 \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{6}{8}x+\frac{91}{8} \;\Leftrightarrow\; y=-\frac{3}{4}x+\frac{91}{8}$$

Assim, a equação reduzida da mediatriz do segmento $[AD]$ é $y=-\frac{3}{4}x+\frac{91}{8}$

**1.3.** A região sombreada é limitada pelas rectas de equações $x=0$, $x=3$ e $y=6$ e pela circunferência de centro no ponto $A(3,6)$ e raio igual à norma de $\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AD}=D-A=(6,10)-(3,6)=(3,4)$ pelo que $\left\|\overrightarrow{AD}\right\|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

Assim, uma condição que define a região sombreada, incluindo a fronteira, é

$(x-3)^2+(y-6)^2\leq 25 \;\wedge\; 0\leq x\leq 3 \;\wedge\; y\leq 6$

**2.1.** Tem-se $\overrightarrow{DG} - \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{FB} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{DC}$

Assim, $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DG}$

$C + \overrightarrow{FE} = C + \overrightarrow{CD} = D$

Assim, $C + \overrightarrow{FE} = D$

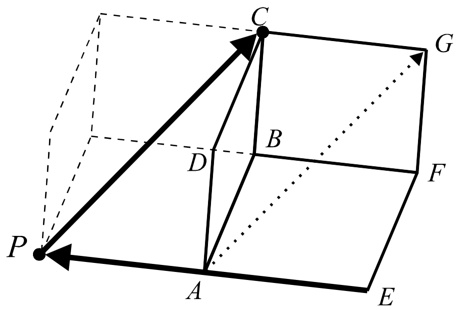
Apresentam-se a seguir dois processos para determinar $E + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG}$

1.º Processo

$$E + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG} = E + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG} = E + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG} =$$
$$= A + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG} = A + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{FB} = G + \overrightarrow{FB} = G + \overrightarrow{GC} = C$$

Assim, $E + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG} = C$

2.º Processo




$E + 2\overrightarrow{FB} = P$

$P + \overrightarrow{AG} = C$

Assim, $E + 2\overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AG} = C$

**2.2.1.** A secção produzida no cubo pelo plano $ABG$ é o rectângulo $[ABGH]$

A área deste rectângulo é igual a $\overline{AB} \times \overline{BG}$

Tem-se $\overline{AB} = \overline{EF} = \sqrt{(10-8)^2 + (8-5)^2 + (6-0)^2} = 7$

E, como $\overline{AB} = 7$, tem-se $\overline{BG} = 7\sqrt{2}$

A área da secção é, portanto, igual a $7 \times 7\sqrt{2}$, ou seja, $49\sqrt{2}$

**2.2.2.** Comecemos por determinar as coordenadas do ponto $B$

Tem-se $B = F + \overrightarrow{EA}$

$\overrightarrow{EA} = A - E = (11, -1, 2) - (8, 5, 0) = (3, -6, 2)$

Portanto, $B = F + \overrightarrow{EA} = (10, 8, 6) + (3, -6, 2) = (13, 2, 8)$

Assim, a recta que contém o ponto $B$ e é paralela ao eixo $Oz$ pode ser definida pela condição $x = 13 \ \wedge \ y = 2$
ou pela condição $(x, y, z) = (13, 2, 8) + k(0, 0, 1), \ k \in \mathbb{R}$

**3.1.** Apresenta-se um exemplo de uma resposta correcta a este item.

A recta $QR$ e o plano $EHC$ são estritamente paralelos.
Os planos $CRV$ e $PQR$ são perpendiculares.
As rectas $AR$ e $VG$ são concorrentes.
As rectas $AE$ e $FG$ são não complanares.
A recta $EP$ e o plano $BCG$ são concorrentes.

**3.2.** Dos vários processos de resolução deste item, apresentam-se dois.

1.º Processo

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-14z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-14z+49=4+4+49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=57$$

Portanto, o ponto $V$ tem cota igual a $7$

Assim, a altura da pirâmide é igual a $7$

A medida do lado da base da pirâmide é igual à abcissa do ponto $P$. Este ponto é um dos pontos de intersecção da superfície esférica com o eixo $Ox$, pelo que tem ordenada nula e cota nula.

Substituindo, na equação da superfície esférica, $y$ por zero e $z$ por zero, obtém-se

$$x^2-4x=0 \Leftrightarrow x(x-4)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4$$

Como $P$ pertence ao semieixo positivo $Ox$, tem-se $P(4,0,0)$ e, portanto, a medida do lado da base da pirâmide é igual a $4$ e a área da base é igual a $16$

Assim, o volume da pirâmide é $\frac{16\times 7}{3}=\frac{112}{3}$

2.º Processo

$$x^2+y^2+z^2-4x-4y-14z=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-4x+4+y^2-4y+4+z^2-14z+49=4+4+49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-2)^2+(z-7)^2=57$$

Portanto, o ponto $V$ tem coordenadas $(2,2,7)$

Assim, a altura da pirâmide é igual a $7$ e, atendendo a que a pirâmide é quadrangular regular, o centro da base é o ponto $(2,2,0)$, pelo que a base tem lado $4$

O volume da pirâmide é, portanto, $\frac{4^2\times 7}{3}=\frac{112}{3}$