

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

06/06/2005

Turmas A e E - Provas 1 e 2

10.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	B	D	C	A	B
Questão	5	4	2	1	3
Prova 2	A	D	B	D	A

2.ª Parte

1.

a)

Se um dos lagos tiver um metro de raio, será $\overline{AP} = 2 \text{ m}$ ou $\overline{AP} = 6 \text{ m}$.

Ora, $A(2) = \frac{\pi}{2}(8 \times 2 - 2^2) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi$ e $A(6) = \frac{\pi}{2}(8 \times 6 - 6^2) = \frac{12\pi}{2} = 6\pi$.

Portanto, se um dos lagos tiver um metro de raio, é de $6\pi \text{ m}^2$ a área relvada.

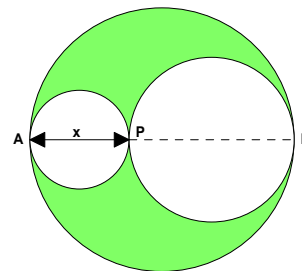
b)

A função está definida em $]0, 8[$. Ora,

$$\begin{aligned} A(x) &= \frac{\pi}{2}(8x - x^2) \\ &= -\frac{\pi}{2}(x^2 - 8x) \\ &= -\frac{\pi}{2}[(x-4)^2 - 16] \\ &= -\frac{\pi}{2}(x-4)^2 + 8\pi \end{aligned}$$

Como sabemos, a função quadrática $x \rightarrow f(x) = -\frac{\pi}{2}(x-4)^2 + 8\pi$ tem por gráfico uma parábola com a concavidade voltada para baixo, com eixo de simetria a recta de equação $x = 4$ e cujo vértice é o ponto $V(4, 8\pi)$. Portanto, o maximizante procurado é $x = 4$.

Assim, de forma a tornar máxima a área para o relvado, os lagos devem ter iguais raios: 2 metros.



2.

a)

Ora, $f(1) = 1^3 - 4 \times 1^2 + 1 + 6 = 4$.

Logo, de acordo com o «teorema do resto», o resto da divisão de $f(x)$ por $x - 1$ é 4. A afirmação é, portanto, verdadeira.

- b) Aplicando sucessivamente a regra de Ruffini, temos:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -4 & 1 & 6 \\ -1 & & & & \\ \hline & 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & & & \\ \hline & 1 & -3 & & 0 \\ 3 & & & & \\ \hline & 1 & & & 0 \end{array}$$

Logo, $f(x) = 1 \times (x - 3)(x - 2)(x + 1) = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$, c.q.m.

- c) Tendo em consideração as propriedades da função afim, vem:

x	$-\infty$	-1		2		3	$+\infty$
x+1	-	0	+	+	+	+	+
x-2	-	-	-	0	+	+	+
x-3	-	-	-	-	-	0	+
$f(x) = (x+1)(x-2)(x-3)$	-	0	+	0	-	0	+

Logo, $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]2, 3[$.

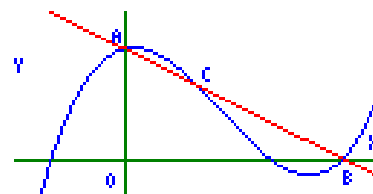
Assim, o conjunto pedido é $S =]-\infty, -1[\cup]2, 3[$.

- d)

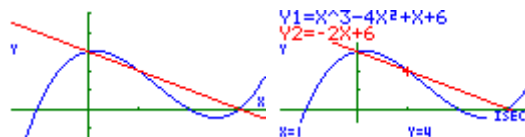
O declive da recta AB é $m_{AB} = \frac{6-0}{0-3} = -2$ e a ordenada na origem é 6.

Logo, $y = -2x + 6$ é a equação reduzida da recta AB.

Definidas as funções $y_1 = x^3 - 4x^2 + x + 6$ e $y_2 = -2x + 6$, utilizando uma janela de visualização adequada, podemos fazer uma representação simultânea dos seus gráficos:



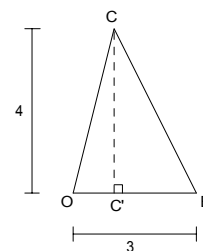
```
Graph Func :Y=
Y1=X^3-4X^2+X+6
Y2=-2X+6
V3:
V4:
V5:
V6:
[SEL DEL TYPE COLR ZMIN DRAW] [INIT TRIG STD STO RCL]
View Window
Xmin : -1.5
max : 3.5
scale:1
Ymin : -3
max : 10
scale:2
```



Recorrendo à ferramenta adequada, obtemos as coordenadas do ponto C que, com a aproximação pedida, são $x_C = 1,0$ e $y_C = 4,0$.

Logo, $A_{[OBC]} = \frac{\overline{OB} \times \overline{CC'}}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = 6$.

Portanto, a medida da área do triângulo [OBC] é 6.



3.

- a)

- $D + \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = D + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = D + \overrightarrow{CB} = D + \overrightarrow{DE} = E$
- A condição $x = 6 \wedge y \leq 7 \wedge z = 0$ define a semi-recta \overrightarrow{CD} .

- b)

Um vector director da recta HB é $\overrightarrow{HB} = (2, 7, 0) - (5, 0, 0) = (-3, 7, 0)$.

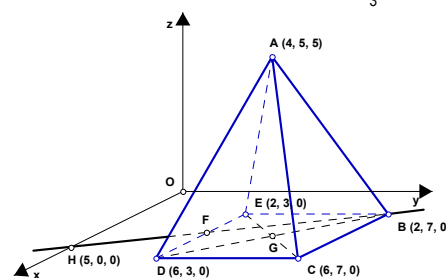
Logo, $(x, y, z) = (5, 0, 0) + k(-3, 7, 0)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta pedida.

Ora, $F(x, 3, 0)$, pois F pertence à recta DE.

Como F pertence à recta HB, vem:

$$(x, 3, 0) = (5, 0, 0) + k(-3, 7, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 3k \\ 3 = 7k \\ 0 = 0 \times k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{7} \\ x = 5 - 3 \times \frac{3}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{7} \\ x = \frac{26}{7} \end{cases}$$

Logo, $F(\frac{26}{7}, 3, 0)$.



c)

O centro da superfície esférica é o ponto médio de $[BD]$, de coordenadas $G\left(\frac{6+2}{2}, \frac{3+7}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 5, 0)$.

O seu raio é $r = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{(6-2)^2 + (3-7)^2 + 0^2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{16+16} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$.

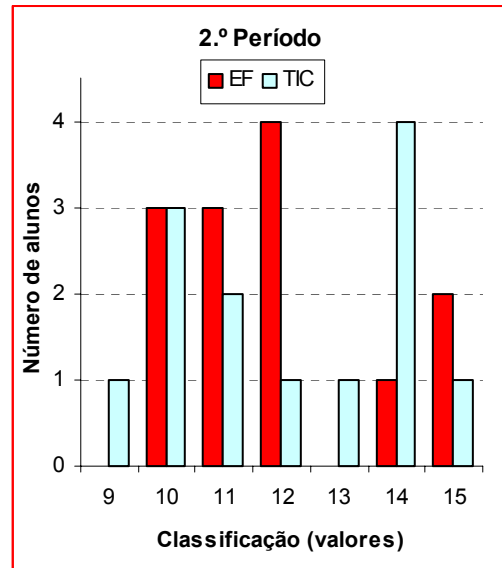
Ora, $\overline{GP} = \sqrt{(6-4)^2 + (5-5)^2 + (-2-0)^2} = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

Como $\overline{GP} = \frac{\overline{BD}}{2} = r$, então o ponto P pertence à superfície esférica considerada.

4.

a)

Classificação em EF (em valores)	Frequência relativa (%)	Frequência absoluta acumulada
10	23,1%	3
11	23,1%	6
12	30,7%	10
14	7,7%	11
15	15,4%	13
TOTAL	100,0%	-----



b)

$$\bar{x}_{EF} = \frac{3 \times 10 + 3 \times 11 + 4 \times 12 + 1 \times 14 + 2 \times 15}{13} = \frac{155}{13} \approx 11,9.$$

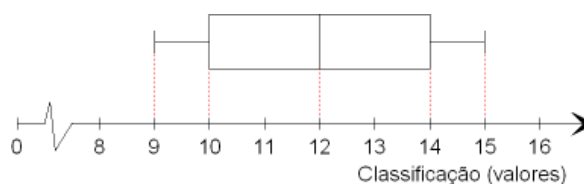
É de 11,9 valores, aproximadamente, a média das classificações atribuídas na disciplina de Educação Física.

c)

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
x_i	9	10	10	10	11	11	12	13	14	14	14	14	15

Numerando de 1 a 13 as classificações atribuídas, ordenadas por ordem crescente, temos:

$$Q_1 = \frac{x_3 + x_4}{2} = \frac{10 + 10}{2} = 10, \quad Q_2 = \tilde{x} = x_7 = 12 \quad \text{e} \quad Q_3 = \frac{x_{10} + x_{11}}{2} = \frac{14 + 14}{2} = 14.$$



A.

Seja M o ponto médio de $[AB]$. Logo, $M\left(\frac{-2+0}{2}, \frac{-1+5}{2}\right) = (-1, 2)$.

Como M é um ponto da recta PC , vista a mediatriz de um segmento de recta conter o ponto médio do segmento, podemos determinar o declive dessa

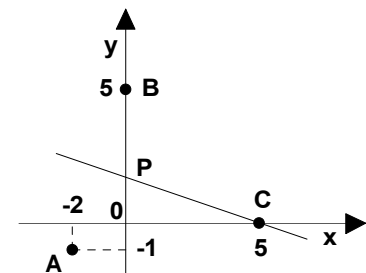
$$\text{mediatriz: } m_{MC} = \frac{2-0}{-1-5} = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, a equação reduzida da recta considerada é do tipo $y = -\frac{x}{3} + b$.

Dado que C pertence a esta recta, temos $0 = -\frac{5}{3} + b \Leftrightarrow b = \frac{5}{3}$.

Assim, $y = -\frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ é a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

Como $P \in Oy$ e é ponto da mediatriz de $[AB]$, então $P\left(0, \frac{5}{3}\right)$.



B.

Ora,.

$$\begin{aligned}j(x) \geq 4 &\Leftrightarrow 2|x-1| - 3 \geq 4 \\&\Leftrightarrow |x-1| \geq \frac{7}{2} \\&\Leftrightarrow x-1 \leq -\frac{7}{2} \vee x-1 \geq \frac{7}{2} \\&\Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2} \vee x \geq \frac{9}{2}\end{aligned}$$

$$\text{Logo, } s =]-\infty, -\frac{5}{2}] \cup [\frac{9}{2}, +\infty[.$$

FIM

-
- (1) Repare que, no instante $t = 0$, a distância entre os ciclistas é de $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ quilómetros. Deslocando-se em direcções perpendiculares, a distância entre os ciclistas nunca é nula, pois isso apenas poderia acontecer se chegassem ao cruzamento ao mesmo tempo. Esta situação não ocorre, visto que se deslocam à mesma velocidade constante e, no momento inicial, encontram-se a distâncias diferentes do cruzamento.
- (2) Comece por construir um paralelogramo [ABCD] e recorde o conceito relativo à soma de um ponto com um vector. Em caso de dúvida, contacte o seu professor
- (3) Em caso de dúvida, contacte o seu professor.
- (4) O gráfico de g pode ser obtido do gráfico de f por translação associada ao vector $\vec{u} = (-2, -3)$. Como o máximo relativo de g passa a ser -1 , facilmente se constata que g apenas possui um zero.
- (5) Dado que $2x - y + 2 = 0 \Leftrightarrow y = 2x + 2$, o declive da recta é $m = 2 = \frac{u_2}{u_1}$, sendo u_1 e u_2 as coordenadas de um vector director.