

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

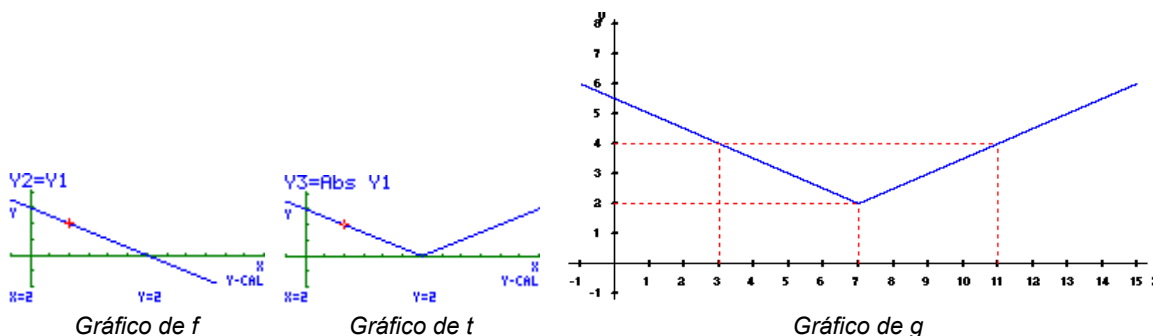
	1 <sup>(1)</sup>	2 <sup>(2)</sup>	3 <sup>(3)</sup>	4 <sup>(4)</sup>	5 <sup>(5)</sup>
<b>Questão</b>	1	2	3	4	5
<b>Prova 1</b>	B	D	A	A	C
<b>Questão</b>	5	3	1	2	4
<b>Prova 2</b>	D	C	B	C	B

### 2.ª Parte

1.

a)

Considerando que o gráfico de  $g$  se pode obter do gráfico de  $x \rightarrow t(x) = |f(x)|$  por translação associada ao vector  $\vec{u} = (1, 2)$ , vem:



b)

A recta considerada contém os pontos de coordenadas  $(6, 0)$  e  $(2, 2)$ , logo o seu declive é  $m = \frac{2-0}{2-6} = -\frac{1}{2}$ .

A sua equação reduzida é da forma  $y = -\frac{x}{2} + b$ . Como as coordenadas do primeiro ponto considerado (por exemplo) têm de verificar esta equação, vem  $0 = -\frac{6}{2} + b \Leftrightarrow b = 3$ .

Portanto, a função  $f$  pode ser definida por  $f(x) = -\frac{x}{2} + 3$ .

c1)

$$\begin{aligned}
 h(x) < -2 &\Leftrightarrow 1 - \left| 3 - \frac{x}{2} \right| < -2 \\
 &\Leftrightarrow \left| 3 - \frac{x}{2} \right| > 3 \\
 &\Leftrightarrow 3 - \frac{x}{2} < -3 \quad \vee \quad 3 - \frac{x}{2} > 3 \\
 &\Leftrightarrow 6 - x < -6 \quad \vee \quad 6 - x > 6 \\
 &\Leftrightarrow x > 12 \quad \vee \quad x < 0
 \end{aligned}$$

Logo,  $S = ]-\infty, 0[ \cup ]12, +\infty[$ .

c2)

$$\text{Ora, } h: x \rightarrow 1 - \left| 3 - \frac{x}{2} \right| = \begin{cases} 1 - (3 - \frac{x}{2}) \Leftrightarrow 3 - \frac{x}{2} \geq 0 \\ 1 - (-3 + \frac{x}{2}) \Leftrightarrow 3 - \frac{x}{2} < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x}{2} - 2 \Leftrightarrow x \leq 6 \\ -\frac{x}{2} + 4 \Leftrightarrow x > 6 \end{cases}$$

2.

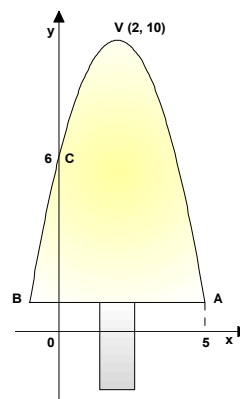
a)

Ora, a parábola referida pode ser definida por uma expressão da forma

$$y = a(x - h)^2 + k, \text{ com } h = 2 \text{ e } k = 10.$$

Portanto,  $g(x) = a(x - 2)^2 + 10$ , com  $a \in \mathbb{R}$  ( $a \in \mathbb{R}^-$ , porquê?). Como o ponto C é um ponto da parábola, vem:  $g(0) = 6 \Leftrightarrow a(0 - 2)^2 + 10 = 6 \Leftrightarrow a = -1$ .

$$\text{Logo, } g(x) = -(x - 2)^2 + 10.$$



b)

A altura da parte correspondente ao gelado é a distância entre o ponto V e a recta AB.

Como A é também um ponto da parábola, a sua ordenada é

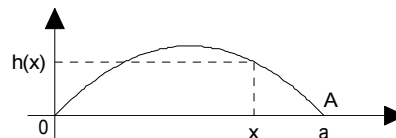
$$y_A = g(5) = -(5 - 2)^2 + 10 = -9 + 10 = 1.$$

Assim,  $d = y_V - y_A = 10 - 1 = 9$  e, portanto, a parte correspondente ao gelado tem 9 cm de altura.

3.

a)

O ponto alcançado pela água tem ordenada nula, pelo que será  $h(x) = 0$ , com  $a > 0$ .



$$\text{Ora, } h(x) = 0 \Leftrightarrow x - 0,2x^2 = 0 \Leftrightarrow x(1 - 0,2x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee 1 - 0,2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 5.$$

Portanto, é de 5 metros a distância alcançada pela água.

b)

O gráfico da função considerada é um arco de parábola, simétrico em relação a uma recta paralela ao eixo Oy e que contém o vértice dessa parábola.

Ora, a equação desse eixo de simetria é  $x = \frac{x_R + x_A}{2} = \frac{0 + 5}{2} = \frac{5}{2}$ , pelo que a ordenada do vértice da parábola

$$\text{é } y_V = h\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} - 0,2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{2} - \frac{1}{5} \times \frac{25}{4} = \frac{10}{4} - \frac{5}{4} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Portanto, a água atinge uma altura máxima de 1,25 metros.

**Nota:**

Uma alternativa para determinar as coordenadas do vértice, passaria por escrever  $h(x) = a(x - h)^2 + k$ .

$$\text{Ou seja, } h(x) = -0,2(x^2 - 5x) = -0,2\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] = -0,2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{5} \times \frac{25}{4} = -0,2\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.$$

c1)

Pretende-se determinar o conjunto-solução da condição  $h(x) \geq 0,8$ .

Como conhecemos a representação gráfica da função, o conjunto-solução procurado ficará determinado conhecendo as soluções da equação  $h(x) = 0,8$ .

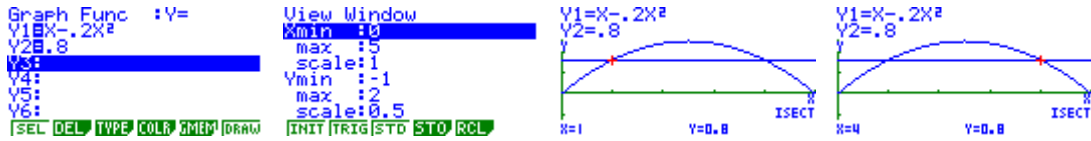
Assim, temos:

$$\begin{aligned} h(x) = 0,8 &\Leftrightarrow x - 0,2x^2 = 0,8 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{5 \pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x = 4 \end{aligned}$$

Logo, a água encontra-se a uma altura superior ou igual a 80 centímetros para  $x \in [1, 4]$ , em metros.

c2)

Sabendo que o domínio da função é  $[0, 5]$  e tendo também em conta a altura máxima atingida pela água, podemos considerar adequada a janela de visualização  $[0, 5] \times [-1, 2]$ . Definidas as funções  $y_1 = x - 0,2x^2$  e  $y_2 = 0,8$ , representando-as simultaneamente podemos determinar as coordenadas dos pontos de intersecção dos dois gráficos:



As coordenadas dos pontos de intersecção são  $(1,0; 0,8)$  e  $(4,0; 0,8)$ .

Logo, a água encontra-se a uma altura superior ou igual a 80 centímetros para  $x \in [1,0; 4,0]$ , em metros.

4.

a1)

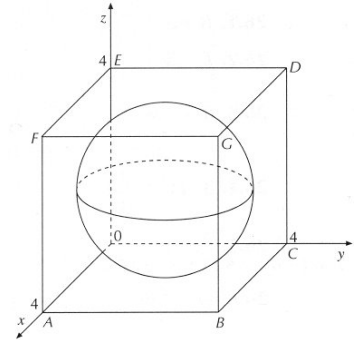
O plano mediador de  $[AB]$  pode ser definido por  $y = 2$ .

a2)

A face  $[BCDG]$  pode ser definida por  $y = 4 \wedge 0 \leq x \leq 4 \wedge 0 \leq z \leq 4$ .

a3)

A esfera considerada pode ser definida por  $(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + (z - 2)^2 \leq 4$ , visto ter raio igual a metade da aresta do cubo e o seu centro ser o centro do cubo, de coordenadas  $(2, 2, 2)$ .



a4)

Como  $C(0, 4, 0)$  e  $F(4, 0, 4)$ , um vector director da recta é  $\overrightarrow{CF} = (4, 0, 4) - (0, 4, 0) = (4, -4, 4)$ .

Logo,  $(x, y, z) = (0, 4, 0) + k(1, -1, 1)$ ,  $k \in \mathbb{R}$  é uma equação vectorial da recta  $FC$ .

b)

Ora,  $\vec{w} = (0, 4, 0) + (-4, 4, 4) = (-4, 8, 4)$ .

Logo,  $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-4)^2 + 8^2 + 4^2} = \sqrt{96} = \sqrt{16 \times 6} = 4\sqrt{6}$ .

c)

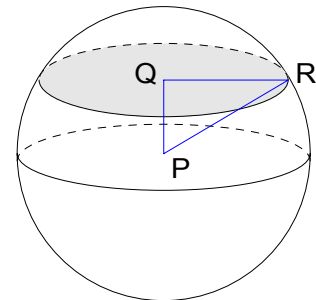
A secção produzida é o círculo de raio  $[QR]$  (ver figura). Aplicando o teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo  $[PQR]$ , temos

$\overline{QR} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$ . Esse círculo tem  $3\pi \text{ cm}^2$  de área.

Alternativa:

$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 \leq 4 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 + (3-2)^2 \leq 4 \\ z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 + (y-2)^2 \leq 3 \\ z = 3 \end{cases}$$

Portanto, a secção produzida é um círculo de centro  $(2, 2, 3)$  e raio  $\sqrt{3}$  unidades, pertencente ao plano de equação  $z = 3$ . Logo, o círculo tem  $3\pi \text{ cm}^2$  de área.



(1) Como a concavidade da parábola está voltada para cima, então  $a > 0$ .

Ora,  $y(0) = a \times 0^2 + b \times 0 + c = c$ . Por observação do gráfico, verifica-se que  $y(0) < 0$ . Logo,  $c < 0$ .

Estas duas condições são suficientes para eliminar 3 das alternativas.

(Tente agora mostrar que, de facto, é  $b < 0$ . Sugestão: considere  $c = 0$  e preveja a alteração no gráfico)

(2) Em caso de dúvida, contacte o seu professor. De qualquer forma, repare:

Para  $x = 0$ , a secção produzida é a face contida no plano  $yOz$ ;

Quando  $x \rightarrow +\infty$ , a secção produzida tende a confundir-se com a face paralela ao plano  $xOz$ .

(3) Em caso de dúvida, contacte o seu professor.

(4) A função não é par, pois o gráfico não é simétrico em relação ao eixo  $Oy$ . Também,  $D'_h = \mathbb{R}_0^+$ .

Apenas uma das duas restantes alternativas satisfaz  $h(-3) = 0$ , por exemplo.

(5) Em caso de dúvida, contacte o seu professor.