Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

24/01/2005 **Turmas A e E - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

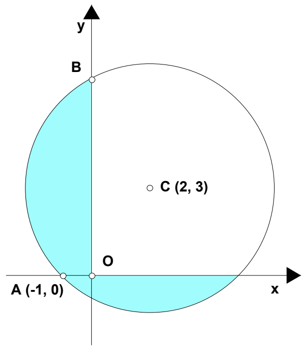
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2-a)*	*2-b)*	*3*	*4*
Prova 1	**B**	**C**	**A**	**D**	**A**
Questão	*3*	*4-a)*	*4-b)*	*2*	*1*
Prova 2	**C**	**D**	**B**	**B**	**D**

2.ª Parte

1.



a)

O raio da circunferência é $r = \overline{AC} = \sqrt{(2+1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$ *e o seu centro é* $C\,(2, 3)$.

Assim, uma sua equação é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (3\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-3)^2 = 18 \text{, c.q.m..}$$

b)

O ponto B é um ponto de abcissa nula, pois pertence ao eixo Oy.
Como B é um ponto da circunferência, as suas coordenadas terão de verificar a equação da circunferência. Assim, vem:

$$(0-2)^2 + (y-3)^2 = 18 \Leftrightarrow (y-3)^2 = 14 \Leftrightarrow y-3 = \pm\sqrt{14} \Leftrightarrow y = 3 \pm \sqrt{14}\,.$$

Como o ponto pretendido (intersecção da circunferência com o semi-eixo positivo das ordenadas) tem ordenada positiva, conclui-se que $B\,(0, 3+\sqrt{14})$.

c)

A mediatriz de [AO] será uma recta paralela ao eixo das ordenadas e que contém o ponto médio do segmento. Por isso, uma condição que caracteriza essa recta é a equação $x = -\frac{1}{2}$.

Designando o ponto médio de [AC] por D, temos $D\,(\frac{-1+2}{2}, \frac{0+3}{2}) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

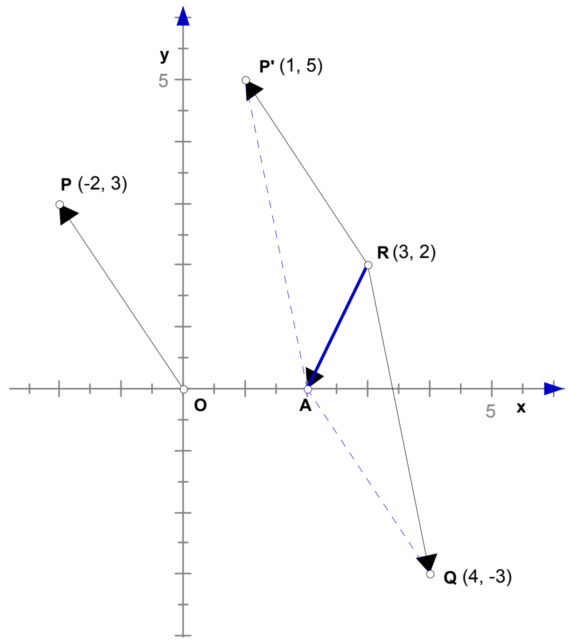
Como a abcissa de D não é $-\frac{1}{2}$*, conclui-se que o ponto médio de [AC] não pertence à mediatriz de [AO].*

d)

Uma condição que caracteriza o domínio plano colorido (incluindo a fronteira) é:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 18 \quad \wedge \quad (x \leq 0 \quad \vee \quad y \leq 0)$$

2.



a)

Os vectores considerados não são colineares, pois não têm a mesma direcção, visto que as rectas OP e RQ não são paralelas.

b)

Como $\overrightarrow{RQ} = (1, -5)$*, então a sua norma será*

$\left\|\overrightarrow{RQ}\right\| = \sqrt{1^2 + (-5)^2} = \sqrt{26}$.

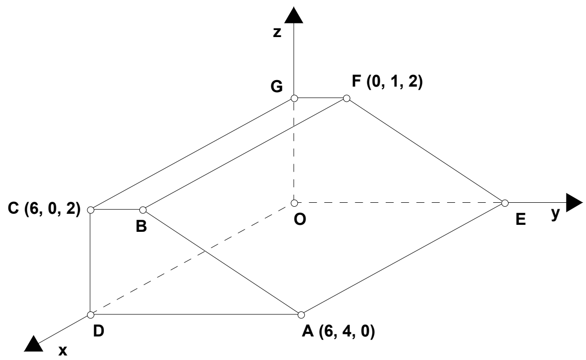
c)

O vector pedido é $\vec{w} = \overrightarrow{RA} = \overrightarrow{RP'} + \overrightarrow{RQ}$ *, onde* $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{RP'}$.

Como $\vec{w} = \overrightarrow{RA} = (-1, -2)$*, então* $-\vec{w} = \overrightarrow{AR} = (1, 2)$.

3.

a)
As coordenadas pedidas são: $B\,(6, 1, 2)$*,* $D\,(6, 0, 0)$*,* $E\,(0, 4, 0)$ *e* $G\,(0, 0, 2)$.



b1) $\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{BA} = \underline{\overrightarrow{BE}}$;

$\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{OG} + \underline{\overrightarrow{FO}} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{OG} + \underline{\overrightarrow{BD}} = \vec{0}$;

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{EG} = \vec{0}$.

b2) As rectas _AD_ e _FE_ são não complanares.

As rectas _AD_ e _AE_ são concorrentes.

A recta _AD_ é perpendicular ao plano _CDG_.

A intersecção dos planos CBF e ADG é _a recta FG_.

b3) A distância de B ao plano yOz é _6_ unidades e ao plano de equação $y = -2$ é _3_ unidades.

c1) uma condição cartesiana que caracteriza a recta CD é: $x = 6 \wedge y = 0$.

c2) uma condição cartesiana que caracteriza a face [BCGF] é: $0 \le x \le 6 \wedge 0 \le y \le 1 \wedge z = 2$.

c3) uma condição cartesiana que caracteriza o plano mediador de [BF] é: $x = 3$.

d)

São $\overrightarrow{CF} = (-6, 1, 0)$ *e* $\overrightarrow{AG} = (-6, -4, 2)$.

e)

O centro da esfera é o ponto médio de [CG], de coordenadas $(3, 0, 2)$*, e o seu raio é* $\dfrac{\overline{CG}}{2} = 3$.

Assim, a condição $(x-3)^2 + y^2 + (z-2)^2 \le 9$ *define a esfera de diâmetro [CG].*

f)
A face [ABFE] é um rectângulo. Logo, o centro da face é o ponto de intersecção das suas diagonais, que se bissectam. Por isso, o centro dessa face é o ponto médio dos segmentos [AF] e [BE], cujas coordenadas são:
$\left(\dfrac{6+0}{2}, \dfrac{4+1}{2}, \dfrac{0+2}{2}\right) = \left(\dfrac{6+0}{2}, \dfrac{1+4}{2}, \dfrac{2+0}{2}\right) = \left(3, \dfrac{5}{2}, 1\right)$.

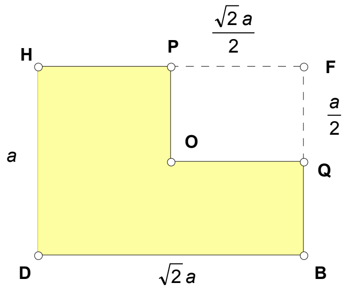
g)
Decompondo a cunha num paralelepípedo rectângulo e num prisma triangular recto, vem:

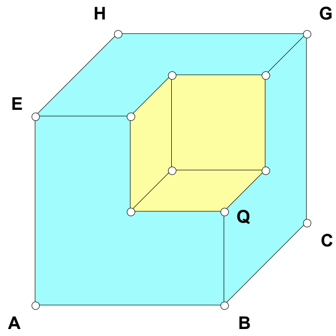
$V = (\overline{BC} \times \overline{CD} \times \overline{CG}) + \left(\dfrac{\overline{CD} \times (\overline{AD} - \overline{BC})}{2} \times \overline{BF}\right) = (1 \times 2 \times 6) + \left(\dfrac{2 \times (4-1)}{2} \times 6\right) = 12 + 18 = 30$.

Portanto, a cunha tem 30 centímetros cúbicos de volume.

4.

O plano HBQ intersecta o cubo inicial, assim como o cubo mais pequeno que lhe foi retirado, produzindo secções rectangulares com dimensões iguais à aresta e à diagonal facial do cubo respectivo.





Considerando a composição dessas duas secções e de acordo com os dados da figura acima, conclui-se que o perímetro pedido pode ser expresso, em função de ***a****, por:*

$$P = a + \sqrt{2}\,a + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}\,a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{2}\,a}{2} = 2a + 2\sqrt{2}\,a = 2a\,(1+\sqrt{2})\,.$$

Note que $P = P_{[HDBQOP]} = P_{[HDBF]} = 2\,(a + \sqrt{2}\,a) = 2a\,(1+\sqrt{2})\,.$

FIM

---

[1] Em caso de dúvida, exponha-a ao seu professor.

[2] Em caso de dúvida, exponha-a ao seu professor.

[3] A esfera tem raio 2 unidades e centro no ponto $C\,(2, -3, 1)$.
O centro da esfera dista 3 unidades do plano de equação $x = -1$, logo esses dois lugares geométricos não possuem pontos comuns.

[4] Em caso de dúvida, recorde a definição de mediatriz de um segmento de recta.

[5] A recta considerada pode ser definida pela intersecção de dois planos paralelos aos planos coordenados *yOz* e *xOz*, respectivamente, e que contêm o ponto de coordenadas $(-5, 7, -2)$.
Ora, esses planos são, respectivamente, definidos pelas condições: $x = -5$ e $y = 7$.