Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

24/11/2004 **Turmas A e E - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

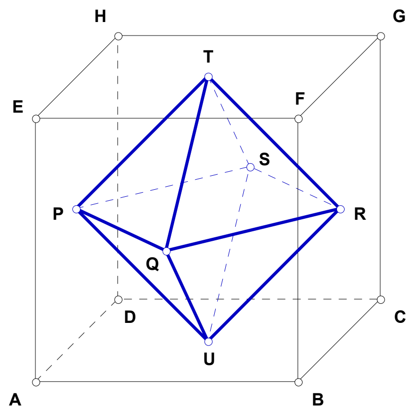
Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1-a)*	*1-b)*	*2*	*3*	*4*
Prova 1	**B**	**C**	**A**	**D**	**D**
Questão	*3-b*	*3-a)*	*2*	*1*	*4*
Prova 2	**C**	**B**	**D**	**B**	**A**

2.ª Parte

1.



a)

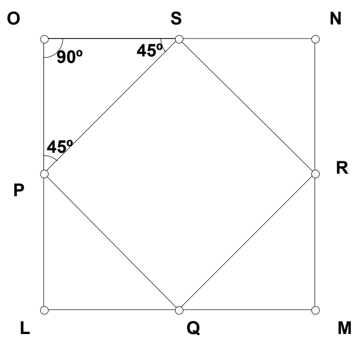
Aceitando a sugestão, representaram-se as duas secções produzidas nos dois sólidos (ver figura mais abaixo): o quadrado [LMNO] e o quadrilátero [PQRS], produzidas no cubo e no referido poliedro, respectivamente.

Os quatro triângulos rectângulos representados são geometricamente iguais (os seus catetos têm de comprimento metade do comprimento da aresta do cubo). Logo, o quadrilátero [PQRS] tem os lados todos iguais, pois são as hipotenusas desses triângulos.
Como cada um dos triângulos é rectângulo e isósceles, vem

$P\hat{S}R = 180º - P\hat{S}O - R\hat{S}N = 180º - 45º - 45º = 90º$ *, obtendo-se igual amplitude para os restantes três ângulos internos do polígono [PQRS].*

Portanto, o quadrilátero [PQRS] é um quadrado, pois os seus ângulos internos são rectos e os seus lados são geometricamente iguais.

Por último, temos $p = \overline{PS} = \sqrt{\overline{OP}^2 + \overline{OS}^2} = \sqrt{(\frac{a}{2})^2 + (\frac{a}{2})^2} = \sqrt{\frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ *, c.q.m..*



b)

Adquirido que os três quadriláteros [PQRS], [TQUS] e [TRUP] são quadrados geometricamente iguais, podemos concluir que as doze arestas do poliedro são geometricamente iguais, pois são lados destes quadriláteros. Consequentemente, as oito faces do poliedro são triângulos equiláteros (logo, polígonos regulares) geometricamente iguais entre si. Acresce que em cada um dos seus seis vértices concorre o mesmo número de arestas (4). Por isso, o poliedro considerado é um octaedro regular.

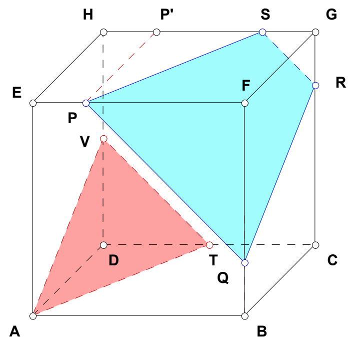
c)

Considerando que o plano PQR divide o octaedro em duas pirâmides congruentes, o volume do octaedro é dado por:

$$V_{Oct} = 2 \times V_P = 2 \times \frac{1}{3} \times A_{[PQRS]} \times \frac{\overline{TU}}{2} = 2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2 \times \frac{a}{2} = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2a^2}{4} \times \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Como $V_{Oct} = \frac{a^3}{6} = \frac{V_C}{6}$ *, o volume do octaedro é a sexta parte do volume do cubo.*

2.



a)

Os lados [PQ] e [RS] são paralelos, pois o plano PQR intersecta os planos paralelos ABF e DCG segundo duas rectas paralelas (as rectas PQ e RS, respectivamente).

Por outro lado, os lados [PS] e [QR] são geometricamente iguais, pois são hipotenusas de dois triângulos rectângulos geometricamente iguais (de catetos com comprimento 4 e 2 centímetros).

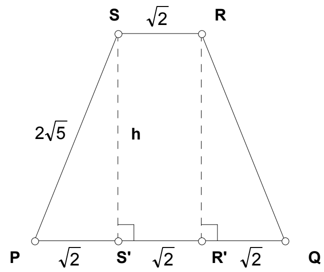
Como o quadrilátero tem um par de lados paralelos e os não paralelos são geometricamente iguais, então é um trapézio isósceles.

Ora, em centímetros, temos:

$\overline{PS} = \overline{QR} = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{P'S}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$,

$\overline{PQ} = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}$ *e* $\overline{RS} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Logo, o trapézio tem de perímetro $P = 2 \times 2\sqrt{5} + 3\sqrt{2} + \sqrt{2} = 4 \times (\sqrt{5} + \sqrt{2})$ *cm.*



Considerando os elementos da figura ao lado, temos para altura do trapézio:

$h = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4 \times 5 - 2} = 3\sqrt{2}$ *centímetros.*

Assim, o trapézio tem de área $A = \dfrac{3\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \times 3\sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 12$ *centímetros quadrados.*

b1)

As rectas PS e BC são não complanares, visto não serem concorrentes (repare que são rectas pertencentes a planos estritamente paralelos, respectivamente, EFG e ABC) nem serem paralelas (note que BC é paralela a FG, mas PS não é paralela a FG).

b2)

A recta HC é paralela ao plano PQR, pois é paralela à recta RS (repare que os triângulos [RGS] e [CGH] são semelhantes), que é uma recta desse plano.
(Recorde que uma recta é paralela a um plano se for paralela a uma recta desse plano)

c)

Um par de planos paralelos intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas.
Logo, o plano α *intersecta o plano ABC segundo uma recta paralela à recta PS, que é a intersecção do plano EFG (paralelo ao plano ABC) com o plano PQR (paralelo ao plano* α*). Consequentemente a secção produzida na base do cubo é o segmento [AT], paralelo ao segmento [PS].*

Analogamente, o segmento [AV], paralelo ao segmento [QR] é a secção produzida na face [ADHE].

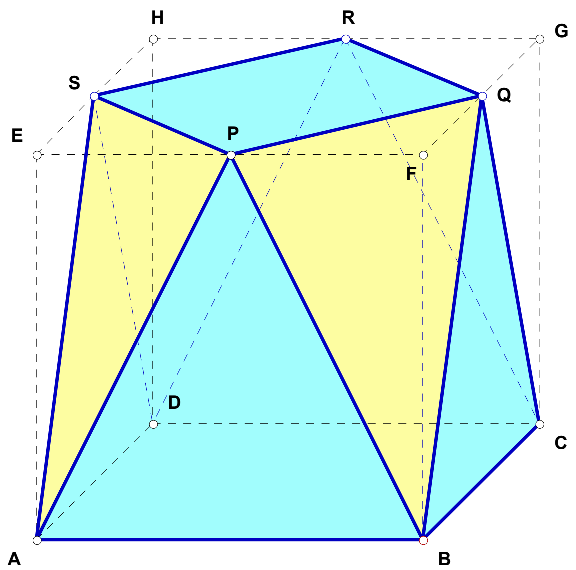
Por fim, dado que os pontos V e T são simultaneamente pertencentes a α *e ao plano que contém a face [CDHG], a secção nesta face é o segmento [VT].*
(Poderia ter construído este segmento em segundo lugar, justificando que seria paralelo a [RS], pois o plano CGH intersecta os planos paralelos α *e PQR segundo rectas paralelas.)*

d)

Como [VT] é paralelo a [RS], também o será relativamente à diagonal facial [HC]. Logo, o triângulo [VDT] é rectângulo isósceles ($\overline{VD} = \overline{TD}$ *). Assim, são geometricamente iguais os triângulos [VAD] e [TAD], pelo que as suas hipotenusas serão também iguais (* $\overline{AV} = \overline{AT}$ *).*

Como $\overline{AV} = \overline{AT} > \overline{VT}$ *, o triângulo obtido na alínea anterior é estritamente isósceles.*

3.



a)

O poliedro possui 10 faces: 2 são quadrados ([ABCD] e [PQRS]) e as restantes 8 são triângulos isósceles (4 deles geometricamente iguais a [ABP] e outros 4 geometricamente iguais a [PQB]).

b)

A maior das arestas é geometricamente igual ao segmento de recta [AP], cujo comprimento é

$\overline{AP} = \sqrt{\overline{AE}^2 + \overline{EP}^2} = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}$ *centímetros.*

c)

A face [PQB] é o único tipo de face cuja área não é imediata. Vamos, então, começar por determinar a área desse triângulo isósceles (note que $\overline{PQ} = 2\sqrt{2}$ – reveja a questão 1.a), por exemplo – e $\overline{PB} = \overline{QB} = \overline{AP} = 2\sqrt{5}$):

A altura, em cm, desse triângulo relativamente à base [PQ], será $h = \sqrt{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{2})^2} = \sqrt{4\times 5 - 2} = 3\sqrt{2}$, cálculo já efectuado na questão 2.a).

Logo, $A_{[PQB]} = \dfrac{2\sqrt{2}\times 3\sqrt{2}}{2} = 6$ centímetros quadrados. (metade da área do trapézio em 2.a) – Porquê?)

Assim, a área da superfície deste poliedro é $A = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 + 4\times 6 + 4\times\dfrac{4\times 4}{2} = 16+8+24+32 = 80$ centímetros quadrados.

d)

O volume pretendido é igual à diferença de volumes do paralelepípedo rectângulo de base [ABCD] e de altura 2 cm e o de 4 pirâmides congruentes, semelhantes à pirâmide [EPSA], com a seguinte razão de semelhança entre as arestas: $r = \dfrac{1}{2}$.

O volume de uma destas pirâmides é $V_p = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1\times 1}{2}\times 2 = \dfrac{1}{3}$ cm³.

Isto é, $r^3 = (\dfrac{1}{2})^3 = \dfrac{1}{8}$ do volume da pirâmide [EPSA]. (Porquê?)

Assim, o valor pedido é $V = 4^2\times 2 - 4\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{92}{3}$ cm³.

FIM

---

(1) Em caso de dúvida, construa o cubo a partir das planificações dadas.

(2) A secção produzida no cubo é o quadrilátero [DHFB].
Ou seja, um rectângulo de comprimento igual à diagonal facial do cubo e de largura igual à aresta do cubo.

(3) Caso tenha dúvidas, fale com o seu professor.

(4) Se as quatro faces do tetraedro são triângulos equiláteros, conclui-se (facilmente) que são todas geometricamente iguais.
Por isso, os segmentos [CM] e [DM] são geometricamente iguais, pois são alturas de triângulos equiláteros geometricamente iguais. Por outro lado, $\overline{MC} = \overline{MD} < \overline{CD}$, pois a altura de um triângulo equilátero é menor que o seu lado.
Logo, o triângulo [MCD] é estritamente isósceles.

(5) Se a diagonal facial de um cubo tem $5\sqrt{2}$ cm, então a sua aresta tem 5 cm de comprimento.
Logo, o perímetro da base do cubo é $P = 4\times 5 = 20$ cm.