Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática A

15/11/2004 **Turmas A e E - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

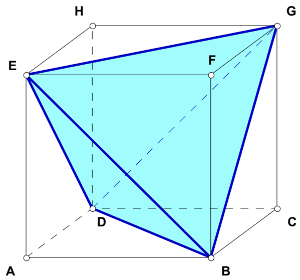
1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**C**	**A**	**D**	**C**

Questão	*3*	*1*	*2*	*5*	*4*
Prova 2	**D**	**A**	**D**	**A**	**B**

2.ª Parte

1.



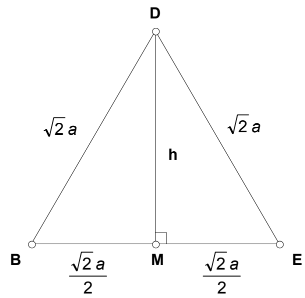
a)

O triângulo [BDE] é equilátero, pois os seus lados, sendo diagonais faciais do cubo, são geometricamente iguais. Assim, sendo equilátero o triângulo [BDE], também é equiângulo e, portanto, $B\hat{D}E = \frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$.

b)

As quatro faces do poliedro são geometricamente iguais, pois os seus lados são diagonais faciais do cubo. São também polígonos regulares, como vimos na alínea anterior. Acresce que em cada um dos seus vértices concorre o mesmo número de arestas (3). Por isso, o poliedro considerado é um tetraedro regular.

c1)



De acordo com o teorema de Pitágoras, a medida da diagonal facial do cubo é dada, em função de a, por $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}\,a$.

Consideremos a face [DBE] do tetraedro. De acordo com os dados da figura ao lado, vem: $h = \sqrt{(\sqrt{2}\,a)^2 - (\frac{\sqrt{2}\,a}{2})^2} = \sqrt{2a^2 - \frac{2a^2}{4}} = \sqrt{\frac{6a^2}{4}} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$.

Assim, $A_f = \frac{\overline{BE} \times \overline{DM}}{2} = \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\,a \times \frac{\sqrt{6}}{2}a = \frac{\sqrt{12}\,a^2}{4} = \frac{2\sqrt{3}\,a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}a^2$ *, c.q.m..*

c2)

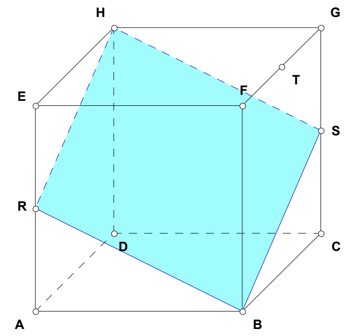
Tendo em consideração a constatação referida na nota, o volume o tetraedro é dado por:

$V_T = V_C - 4 \times V_P = a^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{\overline{AB} \times \overline{AE}}{2} \times \overline{AD} = a^3 - 4 \times \frac{1}{3} \times \frac{a \times a}{2} \times a = a^3 - \frac{2a^3}{3} = \frac{a^3}{3}$.

Portanto, $V_T = \frac{a^3}{3} = \frac{V_C}{3}$ *, c.q.m..*

2.

a)



Os lados do quadrilátero [RBSH] são geometricamente iguais, pois são hipotenusas de quatro triângulos rectângulos geometricamente iguais (de catetos iguais a uma aresta e a meia aresta, respectivamente). As diagonais deste quadrilátero são os segmentos de recta [RS] e [BH], geometricamente iguais à diagonal facial e à diagonal espacial do cubo, respectivamente. Como o quadrilátero tem os quatro lados iguais e as suas diagonais são diferentes, é um losango (não quadrado).

Ora, $\overline{RB} = \sqrt{\overline{AR}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Logo, o quadrilátero tem de perímetro $P = 4 \times 2\sqrt{5} = 8\sqrt{5}$ *centímetros.*

A diagonal facial do cubo tem de comprimento $\overline{BD} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$ *centímetros.*

A diagonal espacial tem de comprimento $\overline{BH} = \sqrt{\overline{BD}^2 + \overline{DH}^2} = \sqrt{32 + 4^2} = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}$ *centímetros.*

Assim, o quadrilátero tem de área $A = \dfrac{\overline{BH} \times \overline{RS}}{2} = \dfrac{4\sqrt{3} \times 4\sqrt{2}}{2} = 8\sqrt{6}$ *centímetros quadrados.*

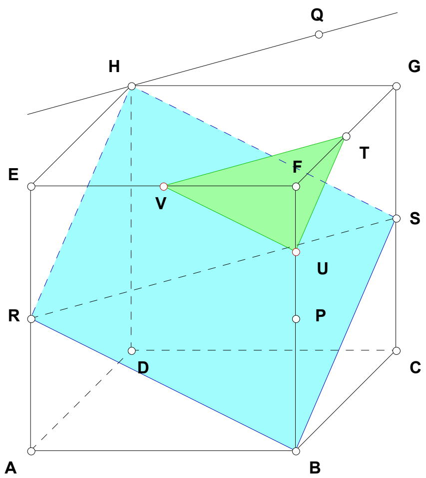
b1)

Como é sabido, a aresta [EF] é perpendicular à face [BCGF]. Logo, a recta EF é perpendicular ao plano BCG e, por isso, é perpendicular a todas as rectas desse plano, em particular à recta BS. Portanto, as rectas EF e BS são perpendiculares (não complanares, visto não serem concorrentes e tão pouco paralelas).

b2)

A recta que contém a diagonal espacial [HB] é uma recta do plano RBS, plano dado como paralelo ao plano α*. Logo, esta recta é paralela ao plano* α*, pois "se dois planos são paralelos, toda a recta de um deles é paralela ao outro".*

c)

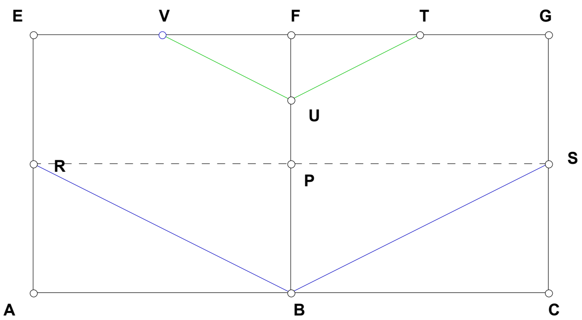


Um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas. Logo, o plano BCG intersecta os dois planos paralelos referidos (o plano RBS e o plano α*) segundo rectas paralelas (as rectas BS e TU, respectivamente). Assim, a secção feita na face [BCGF] é o segmento de recta [TU], paralelo ao segmento de recta [BS], dado que T é um ponto comum ao plano* α *e à face [BCGF]. Analogamente, justifica-se que o segmento de recta [UV] é paralelo ao segmento de recta [BR]. Por fim, dado que os pontos V e T são simultaneamente pertencentes a* α *e ao plano que contém a face [EFGH], a secção nesta face é o segmento [VT].*

d)

<u>Pela sugestão 1</u> (ver figura acima)
O plano RBS intersecta os planos paralelos EFG e RPS (P é o ponto médio de [BF]) segundo rectas paralelas, respectivamente, RS e HQ. Por outro lado, o plano EFG intersecta os planos paralelos RBS e α *segundo rectas paralelas, respectivamente, HQ e VT. Logo, RS, HQ e VT são rectas paralelas.*
Já vimos na alínea anterior que as rectas TU e BS são paralelas, assim como as rectas VU e RB também entre si. Assim, concluímos que os triângulos [RBS] e [VUT] são semelhantes, pois possuem os lados paralelos, cada um a cada um (o que implica a igualdade de dois pares de ângulos em cada um dos triângulos).

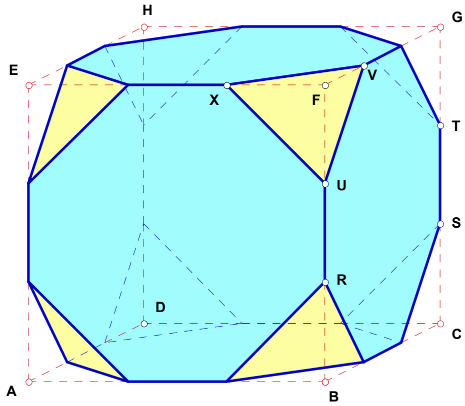
Desta forma, podemos concluir que o triângulo [VUT] é também isósceles, pois $\overline{RB} = \overline{BS} < \overline{RS}$.



<u>Pela sugestão 2</u> (ver figura ao lado)
Tendo em conta as condições da figura, podemos concluir que a recta FB é eixo de simetria da mesma, pelo que $\overline{VU} = \overline{TU}$*, isto é, também V é o ponto médio da aresta a que pertence.*
(Se preferir, pode comprovar a igualdade dos triângulos [VUF] e [TUF] – ALA – e concluir exactamente o mesmo)

Como $\overline{VU} = \overline{TU} < \overline{VT}$ *(repare nos catetos dos triângulos de que estes segmentos são hipotenusas), podemos concluir que o triângulo [VUT] é isósceles.*

3.



a)

O poliedro possui 14 faces: 8 são triângulos equiláteros geometricamente iguais entre si e 6 são octógonos não regulares, também geometricamente iguais entre si.

b)

Tendo em conta que a diagonal [US] é também diagonal do rectângulo [RSTU], o seu comprimento é

$\overline{US} = \sqrt{\overline{UR}^2 + \overline{RS}^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ *centímetros.*

As arestas são de dois tipos: umas são geometricamente iguais ao segmento [UR], de comprimento 2 centímetros; as outras são geometricamente iguais ao segmento [UV], de comprimento $2\sqrt{2}$ *centímetros.*

c)

Atendendo à sugestão, comecemos por calcular a área de uma das faces triangulares ([UVX]).

Assim, temos: $A_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \overline{XF}^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2^2 = 2\sqrt{3}$ *centímetros quadrados.*

A área de uma face octogonal é $A_{Oct} = \overline{AB}^2 - 4 \times A_{[XFU]} = 6^2 - 4 \times \frac{2 \times 2}{2} = 28$ *centímetros quadrados.*

Logo, a área pedida é $A_{CT} = 6 \times A_{Oct} + 8 \times A_\Delta = 6 \times 28 + 8 \times 2\sqrt{3} = 168 + 16\sqrt{3}$ *centímetros quadrados.*

d)

Dada a simetria do sólido, o volume pretendido é igual à soma de metade do volume do cubo truncado com o volume do paralelepípedo de base [ABCD] e altura igual a $\frac{\overline{RU}}{2}$.

Assim, o valor pedido é $V_a = \frac{1}{2} \times \frac{616}{3} + 6^2 \times \frac{2}{2} = \frac{308}{3} + 36 = \frac{416}{3}$ *centímetros cúbicos.*

FIM

---

(1) Duas das planificações apresentam polígonos de dois tipos, logo são de eliminar essas alternativas.
Uma das duas restantes é constituída por 6 triângulos equiláteros, que sabemos não corresponder a qualquer poliedro regular.
A que sobra, corresponde, de facto, a uma planificação do icosaedro.

(2) Apenas são verdadeiras as afirmações II e IV.
Facilmente se pode verificar a falsidade das outras duas afirmações, criando algumas situações geométricas com os elementos considerados (experimente).

(3) Pode excluir 3 das alternativas, pois $M\hat{F}C \neq 90^\circ$. Para que esse ângulo fosse recto, o ponto M teria de ser coincidente com E.

(4) Se a diagonal de um quadrado mede 6 cm, então seu lado mede $\frac{6}{\sqrt{2}}$ cm. Logo, a sua área mede $\left(\frac{6}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{36}{2} = 18$ cm^2.

(5) O triângulo que **não** pode ser obtido como secção produzida num cubo por um plano é o triângulo rectângulo.
(Reveja a questão 4 da ficha de trabalho «Secções num cubo».)