Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

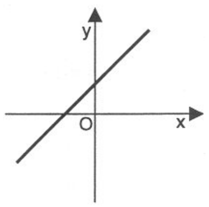
16/06/2003 **Turma A - Prova 1** **10.º Ano**

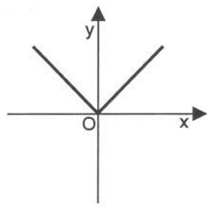
Nome: ____________________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

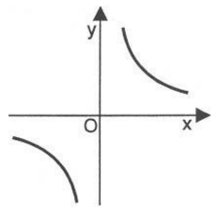
1.ª Parte

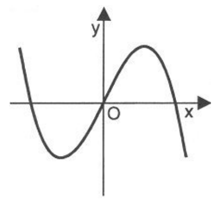
Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Indique qual dos gráficos seguintes pode ser o de uma função ímpar e injectiva.

[A] 

[B] 

[C] 

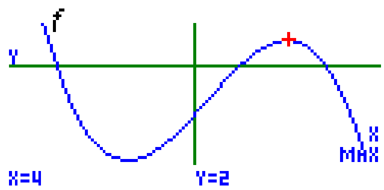
[D] 

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *f*, polinomial do terceiro grau.

2 é um máximo relativo da função *f*.

Seja ***g*** a função, de domínio *IR*, definida por $g(x) = f(x) - 2$.

Quantos são os zeros da função ***g***?

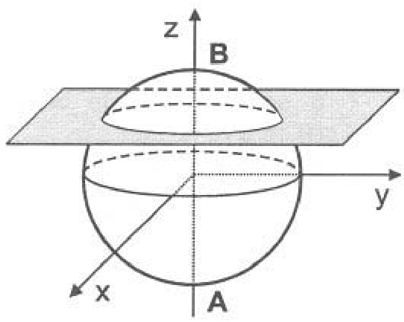


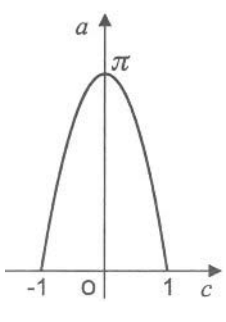
[A] um **[B]** dois **[C]** três **[D]** quatro

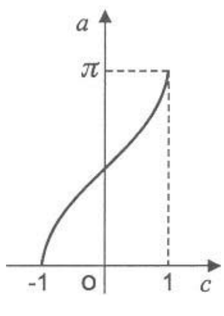
3. Considere, num referencial o. n. *Oxyz*, a esfera definida pela condição $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.
Admita que um ponto P se desloca ao longo do diâmetro [AB], que está contido no eixo *Oz*.
Para cada posição do ponto P, considere o plano que contém P e que é paralelo ao plano *xOy*.

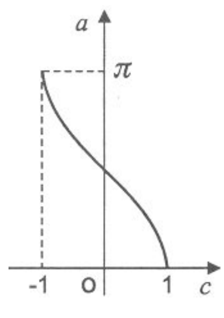
Seja *g* a função que faz corresponder, à cota ***c*** do ponto P, a área ***a*** da secção produzida na esfera pelo referido plano.

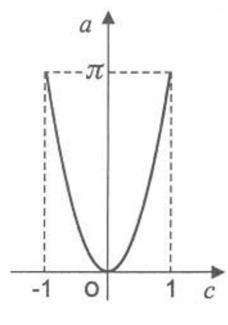
Qual dos seguintes pode ser o gráfico da função *g*?



[A] 

[B] 

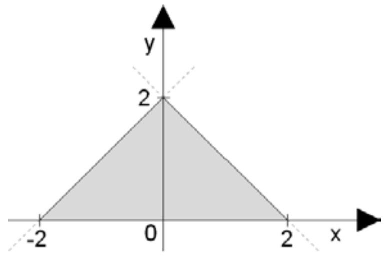
[C] 

[D] 

4. Um vector director da recta t: $2x - y + 2 = 0$ é:

[A] $\vec{u} = (1, -2)$ **[B]** $\vec{u} = (-1, -2)$ **[C]** $\vec{u} = (-2, 1)$ **[D]** $\vec{u} = (2, 1)$

5. Uma condição que define o domínio plano, incluindo a fronteira, é:



[A] $y \le x + 2 \ \wedge\ y \le -x + 2 \ \wedge\ y \ge 0$

[B] $y \le -2x + 2 \ \wedge\ y \le 2x + 2 \ \wedge\ y \ge 0$

[C] $y \le x \ \wedge\ y \le -x \ \wedge\ y \ge 0$

[D] $-2 < x < 2 \ \wedge\ -x + 2 \le y \le x + 2$

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. A figura A representa um cubo com aresta 6.
Considere, para cada vértice, os pontos das arestas que estão à distância x $(0 < x \le 3)$ desse vértice. Seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, obtemos o poliedro (*cubo truncado*) representado na figura B.

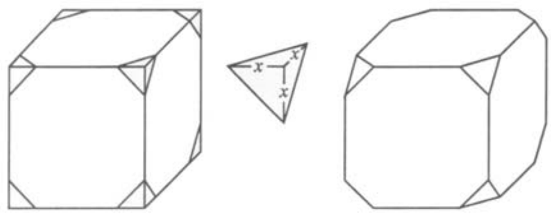
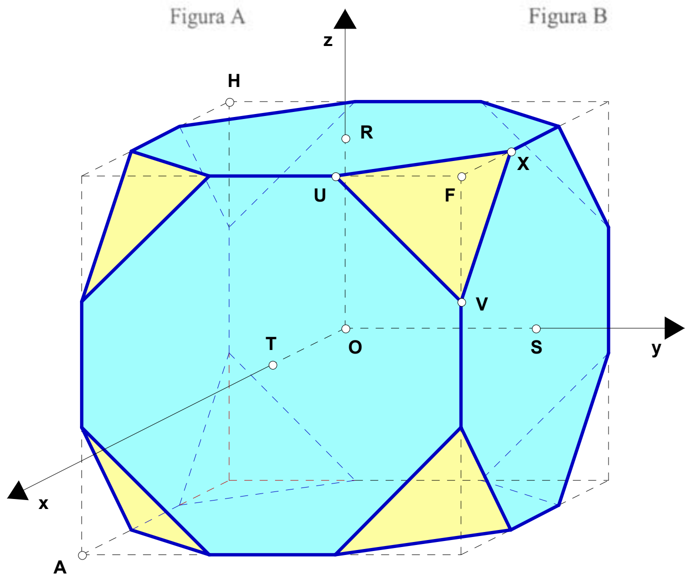


Figura A Figura B

Para $x = 2$, obtém-se o *cubo truncado* representado no referencial o. n. *Oxyz*, onde:

- Os planos coordenados são planos de simetria do sólido
- A, H e F são vértices do cubo original
- R, S e T são pontos de intersecção dos semieixos com as faces do sólido
- $U\,(3, 1, 3)$, $V\,(3, 3, 1)$ e $X\,(1, 3, 3)$



a) Determine uma equação vectorial da recta HV.

b) Determine a norma do vector $\vec{w} = \overrightarrow{VU} - \overrightarrow{VH}$.

c) Determine uma equação do plano mediador do segmento de recta [UV].

d) Recorde que, para cada vértice, se consideraram os pontos das arestas que estão à distância x $(0 < x \le 3)$ desse vértice.
E que, seccionando o cubo por planos que contêm esses pontos, se obteve o *cubo truncado*.

d1) Mostre que o volume do *cubo truncado* é dado, em função de x, por

$$V(x) = \frac{648 - 4x^3}{3} \qquad (x \in \left]0, 3\right])$$

d2) Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de x para o qual o volume do *cubo truncado* é mínimo. Para esse valor de x, indique, justificando, quantas arestas tem o poliedro.

Nota: Na primeira parte da questão, justificando a conclusão, deverá descrever os procedimentos que utilizou. Pode esboçar gráficos ou tabelas copiados da calculadora, que considere elucidativos.
Na segunda parte da questão, pode tentar esboçar parte do poliedro então obtido a partir do cubo inicial, o que poderá facilitar a descoberta de um algoritmo para a contagem pedida.

2. Considere a função de domínio *IR*, definida por $j : x \to 2.\left| x - 1 \right| - 3$.

a) O João pegou na calculadora gráfica e, passado pouco tempo, exclamou:

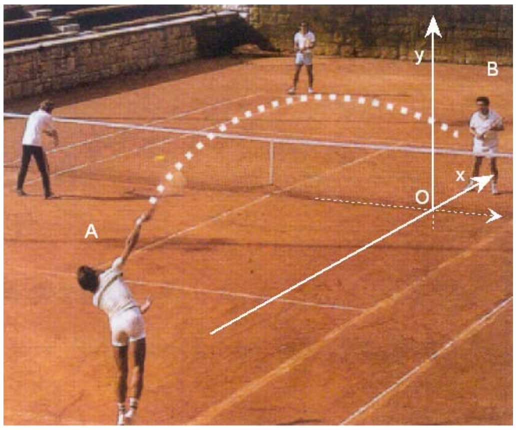
"*Ah!, o gráfico da função j é simétrico relativamente ao eixo Oy.*"

Sem recorrer ao gráfico da função ou à calculadora, justifique que é falsa a afirmação do João.

b) Resolva analiticamente a condição $j(x) \geq 4$.

3. Numa partida de ténis, em certo momento o jogador A bate a bola a uma distância de 8 m do plano da rede.
A bola, descrevendo uma trajectória parabólica, atinge a altura máxima de 4 m a uma distância de 2 m do plano da rede, ainda no lado do jogador A, tocando o chão no campo do jogador B a uma distância de 6 metros da rede.

Os planos da trajectória da bola, do chão e da rede são ortogonais entre si. Considere ainda o referencial o. n. *xOy*, cujos eixos resultam da intersecção desses planos e nos quais a unidade de comprimento é o metro.



a) Mostre que $d(x) = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{15}{4}$, $x \in [-8, 6]$

traduz distância da bola ao chão (em metros) em função da sua posição relativamente ao plano da rede.

Sugestão: Considerando os dados do problema, comece por escrever $d(x)$ na forma $d(x) = a(x - h)^2 + k$.

b) Determine a que altura o jogador bateu a bola.

c) Entre que distâncias ao plano da rede, está a bola a uma altura superior a 3 metros?

Nota: Pode começar por apresentar uma resolução baseada na utilização da calculadora gráfica. Seguidamente, <u>deverá obrigatoriamente</u> confirmar analiticamente a solução apresentada.

4. Considere a função cúbica definida por $h(x) = 2x^3 - 10x^2 + 14x - 6$.

Nota: Não pode apresentar uma resolução baseada na utilização da calculadora gráfica.

a) Usando o algoritmo da divisão inteira, determine o quociente e o resto da divisão de $h(x)$ por $x^2 + 1$.

b) Para todo o *x* real tem-se que $h(x) = (x - 1).q(x)$.
Utilizando a regra de Ruffini, determine o polinómio $q(x)$.

c) Mostre que $h(x) = 2(x - 1)^2.(x - 3)$. (sem desenvolver as operações indicadas nesta expressão)
Construindo agora uma tabela de variação de sinal, determine o conjunto-solução da condição $h(x) < 0$.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
	5	45					

2.ª Parte .... 155 pontos

1. .... 60 pontos
   - a) 9
   - b) 12
   - c) 12
   - d1) 12
   - d2) 15

2. .... 22 pontos
   - a) 10
   - b) 12

3. .... 38 pontos
   - a) 14
   - b) 10
   - c) 14

4. .... 35 pontos
   - a) 10
   - b) 9
   - c) 16

Total **200 pontos**