

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

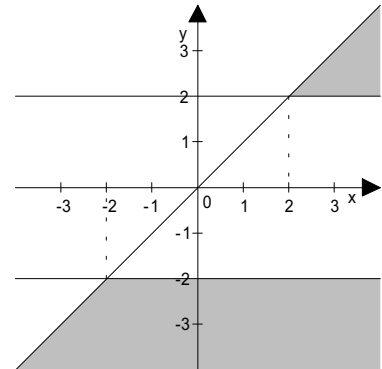
Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a que estão será anulada, o mesmo a contendo e em caso de resposta a mbígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Num referencial ortonormado, a intersecção da recta de equação $x = 3$ com o eixo Ox

- [A] não existe. [B] é R (0, 3). [C] é S (3, 3). [D] é T (3, 0).

2. A região sombreada na figura, incluindo a fronteira, é definida por:

- [A] $|y| \leq 2 \vee y \leq x$
[B] $|y| \geq 2 \vee y \leq x$
[C] $|y| \geq 2 \wedge y \leq x$
[D] $|y| \leq 2 \wedge y \leq x$



3. Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

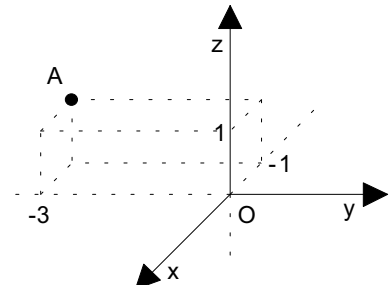
- [A] $\sim (y \leq -2 \vee y \geq 2) \Leftrightarrow y > -2 \wedge y < 2$
[B] $\sim (y \leq -2 \wedge y \geq 2) \Leftrightarrow y > -2 \wedge y < 2$
[C] $\sim (y \geq -2 \vee y \leq 2) \Leftrightarrow y > -2 \wedge y < 2$
[D] $\sim (y \leq -2 \vee y \geq 2) \Leftrightarrow y > -2 \vee y < 2$

4. Num referencial tridimensional ortonormado, considere:

- o ponto A (-1, -3, 1)
- a condição $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 + (z - 1)^2 \leq 4 \wedge x = -1$

a) O ponto A' (-1, -3, -1) é simétrico do ponto A (-1, -3, 1) em relação:

- [A] à origem do referencial. [B] ao plano xOy.
[C] ao eixo Oy. [D] ao plano yOz.



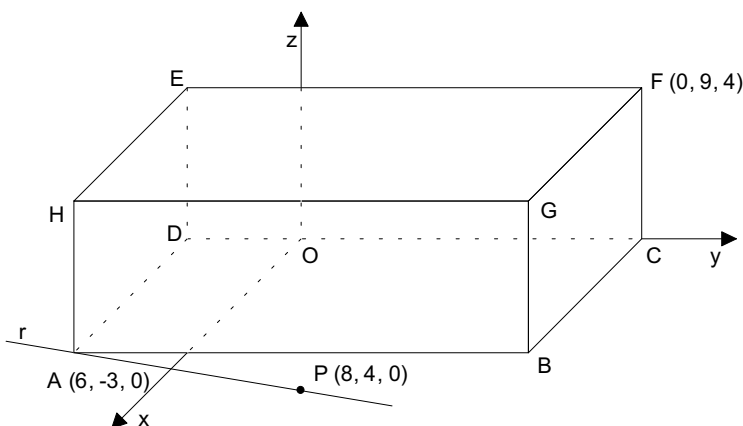
b) A condição dada define:

- [A] um conjunto vazio.
[B] um círculo de centro (2, -3, 1) e raio 2 unidades.
[C] uma circunferência de centro (2, -3, 1) e raio 2 unidades.
[D] o ponto A (-1, -3, 1).

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. A figura representa um paralelepípedo rectângulo [ABCDEFGH] e um referencial tridimensional ortonormado, sendo A (6, -3, 0), F (0, 9, 4) e P (8, 4, 0).



- a) De acordo com os elementos da figura, complete as frases por forma a obter afirmações verdadeiras:

- a1) As coordenadas dos pontos B, E e G são:

B (.....,,);

E (.....,,);

G (.....,,).

- a2) As rectas _____ e _____ são não coplanares. As rectas _____ e _____ são concorrentes.

A recta _____ é perpendicular ao plano _____. A intersecção do plano GFD com o plano ABH é _____.

- a3) A distância de F ao plano xOz é _____ unidades e ao plano de equação $z = -2$ é _____ unidades.

- a4) Uma condição que caracteriza o plano que contém a face [ABGH] é:.....

- a5) Uma condição que caracteriza a recta FG é:.....

- a6) Uma condição que caracteriza a face [ADEH] é:

- b) Qual é a posição relativa das rectas r (recta AP) e BG? Justifique.

- c) Defina algebricamente a superfície esférica de centro em A e que contém F.

- d) Mostre que $\widehat{PAB} = \text{sen}^{-1}\left(\frac{2\sqrt{53}}{53}\right)$.

Sugestão: Considere o triângulo [APP'], sendo $P' \in AB$ e $PP' \perp AB$.

2. Considere a informação ao lado, disponível no site do Pavilhão do Conhecimento e relativa à exposição temporária **Matemática Viva**. (<http://www.pavconhecimento.mct.pt/home/>)

Sabe-se que a elipse correspondente ao bilhar elíptico apresentado possui eixos menor e maior com os comprimentos de 1 e 2 metros, respectivamente.

- a) Considere essa elipse num referencial cujos eixos coordenados sejam seus eixos de simetria, pertencendo os focos ao eixo Ox.

Escreva a equação reduzida dessa elipse e determine as coordenadas dos seus focos.

- b) "De igual modo, uma bola colocada no segundo foco e atirada em qualquer direcção deverá ir cair no buraco."

Qual é o comprimento da trajectória descrita pela bola até cair no buraco? Justifique.

Bilhar elíptico

Matemática Viva

O bilhar elíptico tem um buraco num dos focos da elipse. Uma bola atirada na direcção do segundo foco deverá ir parar ao buraco. De igual modo, uma bola colocada no segundo foco e atirada em qualquer direcção deverá ir cair no buraco.



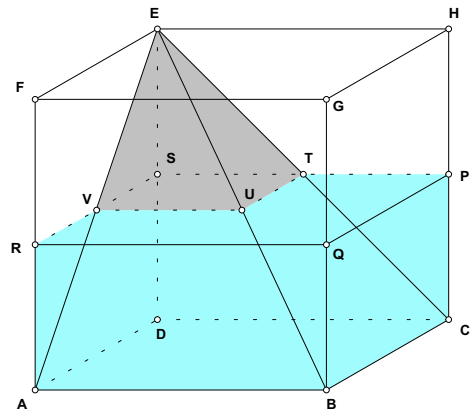
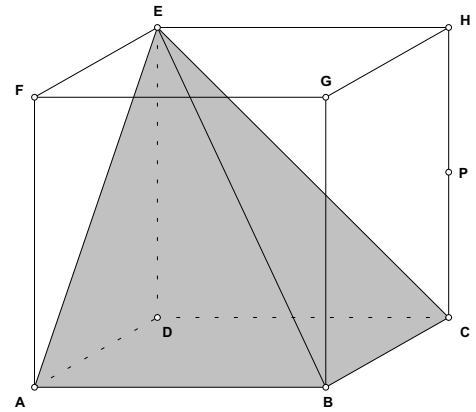
3. Considere o cubo [ABCDEFGH] e a pirâmide [ABCDE] representados na figura ao lado.

- P é o ponto médio da aresta [CH];
- $\overline{AB} = 4 \text{ dm}$.

- Mostre que a soma dos comprimentos de todas as arestas da pirâmide [ABCDE] é $C = 20 + 8\sqrt{2} + 4\sqrt{3}$ dm.
- Considerando valores aproximados de $\sqrt{2}$ e de $\sqrt{3}$ a menos de uma décima, enquadre o valor de C referido na alínea anterior.
- Determine a área total da pirâmide [ABCDE]. Justifique o cálculo da área lateral.
- Desenhe a secção obtida no cubo pelo plano APG. (Reproduza o cubo na sua prova)
- Suponha que o conjunto formado pelo cubo e pela pirâmide é um modelo de um aquário que pode ser cheio exactamente até ao seu topo.

Considerando o aquário assente pela base num plano horizontal e com água até ao ponto P, determine a quantidade de água que terá de acrescentar para o encher completamente. (valor exacto)

Nota: O líquido não pode passar para o interior da pirâmide.

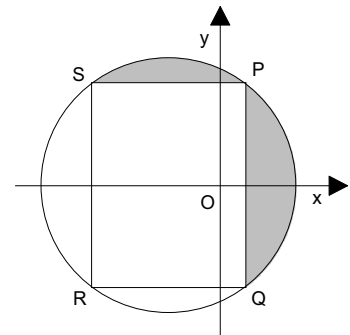


4. Ox é eixo de simetria do rectângulo [PQRS] inscrito na circunferência.

- O ponto Q tem abcissa 1;
- $x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$ é uma equação da circunferência.

- Determine as coordenadas do ponto P.
- Determine o raio da circunferência e as coordenadas do seu centro.
- Escreva uma condição que defina a região sombreada, incluindo a fronteira.

Nota: Em caso de desconhecer as coordenadas de P, considere P (2, 5).



Formulário

Áreas de figuras planas	Volumes
Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$	Prisma: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$	Cilindro: $\text{Área da base} \times \text{Altura}$
Polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$	Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
Círculo: πr^2	Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$
	Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$
Trigonometria	
<p> $\text{sen } \alpha = \frac{a}{c}$ $\text{cos } \alpha = \frac{b}{c}$ $\text{tg } \alpha = \frac{a}{b}$ $\text{sen}^2 \alpha + \text{cos}^2 \alpha = 1$ </p>	$\text{sen } 30^\circ = \text{cos } 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\text{sen } 45^\circ = \text{cos } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\text{sen } 60^\circ = \text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\text{tg } 45^\circ = 1$ $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada..... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

2.ª Parte 155 pontos

1. 62 pontos

- a1) 6
- a2) 10
- a3) 4
- a4) 4
- a5) 4
- a6) 5
- b) 7
- c) 10
- d) 12

2. 18 pontos

- a) 10
- b) 8

3. 50 pontos

- a) 8
- b) 10
- c) 12
- d) 7
- e) 13

4. 25 pontos

- a) 8
- b) 8
- c) 9

Total 200 pontos