Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

16/06/2003 **Turma B - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

Nome: ____________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$

Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**C**	**B**	**A**	**B**	**A**

Questão	*2*	*3*	*1*	*5*	*4*
Prova 2	**A**	**C**	**B**	**D**	**C**

2.ª Parte

1.

a)

Sendo H (-3, -3, 3) e V (3, 3, 1), então $\overrightarrow{HV} = (3, 3, 1) - (-3, -3, 3) = (6, 6, -2)$ *é um vector director da recta HV.*
Logo, $(x, y, z) = (3, 3, 1) + k(3, 3, -1), k \in IR$ *é uma equação vectorial dessa recta.*

b)

Sendo U (3, 1, 3) e V (3, 3, 1), então $\overrightarrow{VU} = (3,1,3) - (3,3,1) = (0, -2, 2)$ *e* $-\overrightarrow{VH} = \overrightarrow{HV} = (6, 6, -2)$ *(**a)**).*
Logo, $\vec{w} = (0, -2, 2) + (6, 6, -2) = (6, 4, 0)$ *e* $\|\vec{w}\| = \sqrt{6^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{52} = \sqrt{2^2 \times 13} = 2\sqrt{13}$ *.*

c)

O plano mediador do segmento de recta [UV] é o conjunto de pontos P (x, y, z) do espaço equidistantes dos extremos do segmento.
Assim, terá de ser $\overline{PU} = \overline{PV} \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2}$ *, donde:*

$$\begin{aligned}(x-3)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-1)^2 &\Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 + z^2 - 6z + 9 = y^2 - 6y + 9 + z^2 - 2z + 1\\ &\Leftrightarrow 4y - 4z = 0\\ &\Leftrightarrow y = z\end{aligned}$$

Portanto, $y = z \wedge x \in IR$ *é uma condição do plano pedido.*
(Note que a condição poderia ter sido descoberta por visualização)

d)

O volume do cubo é $V_C = 6^3 = 216$ *.*
As 8 pirâmides obtidas pelas secções referidas são geometricamente iguais, podendo o volume de uma delas ser expresso em função de x: $V_P = \frac{A_b \times h}{3} = \frac{1}{3} \times \frac{x \times x}{2} \times x = \frac{x^3}{6}$ *(note que* $V_{[UVXF]} = \frac{1}{3} \times \frac{\overline{UF} \times \overline{FV}}{2} \times \overline{FX}$ *).*

Assim, $V(x) = V_C - 8 \times V_P = 216 - 8 \times \frac{x^3}{6} = \frac{1296 - 8x^3}{6} = \frac{648 - 4x^3}{3}$ *, (* $x \in]0, 3]$ *), c.q.m..*

2.

a)

Ora, $j(-1) = 2.|-1-1| - 3 = 2 \times 2 - 3 = 1$ *e* $j(1) = 2.|1-1| - 3 = 0 - 3 = -3$ *, isto é,* $j(-1) \neq j(1)$ *.*
Portanto, é falsa a proposição $j(-x) = j(x), \forall x \in D_j$ *. Isto é, j não é uma função par, pelo que o seu gráfico não pode ser simétrico relativamente ao eixo Oy.*

b)

Ora, $j(x) \geq 4 \Leftrightarrow 2.|x-1| - 3 \geq 4 \Leftrightarrow |x-1| \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x - 1 \leq -\frac{7}{2} \vee x - 1 \geq \frac{7}{2} \Leftrightarrow x \leq -\frac{5}{2} \vee x \geq \frac{9}{2}$ *.*

3.

a)

Dado que as coordenadas do vértice são (-2, 4), a função quadrática correspondente à parábola que contém a trajectória descrita pela bola é do tipo $d(x) = a(x+2)^2 + 4$, *com* $a \in IR^-$. *(Porquê?)*

Como a bola toca o chão no campo do jogador B a uma distância de 6 metros da rede, então $d(6) = 0$.

Logo, $a(6+2)^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow a = -\dfrac{4}{64} \Leftrightarrow a = -\dfrac{1}{16}$.

Portanto, $d(x) = -\dfrac{1}{16}.(x+2)^2 + 4 = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{4x}{16} - \dfrac{4}{16} + 4 = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{60}{16} = -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{15}{4}$, $x \in [-8, 6]$, *c. q. m..*

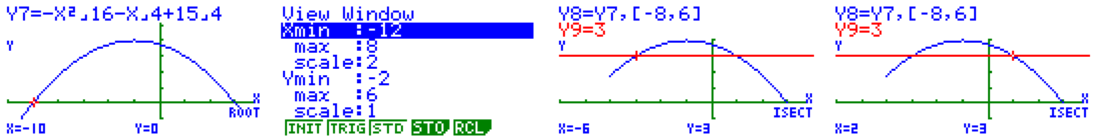
b)

O jogador bateu a bola na posição $x = -8$.

Como $d(-8) = -\dfrac{(-8)^2}{16} - \dfrac{-8}{4} + \dfrac{15}{4} = -4 + 2 + 3{,}75 = 1{,}75$, *o jogador bateu a bola a uma altura de 1,75 metros.*

c)

Começando por fazer a representação da função considerada e uma outra auxiliar $x \to f(x) = 3$, *temos:*



De acordo com o registado, temos $d(x) > f(x) \Leftrightarrow x \in \left]-6, 2\right[$.

Logo, durante a sua trajectória, a bola está a uma altura superior a 3 metros, entre as posições compreendidas a uma distância de 6 e 2 metros do plano da rede, respectivamente medidas no campo do jogador A e no campo do jogador B.

O que se confirma: $d(x) > 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{16}(x+2)^2 + 4 > 3 \Leftrightarrow (x+2)^2 < 16 \Leftrightarrow -4 < x+2 < 4 \Leftrightarrow -6 < x < 2$.

Ou:

Ora, $d(x) > 3 \Leftrightarrow -\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{x}{4} + \dfrac{15}{4} > 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 60 < -48 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 < 0$

Como $x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16+48}}{2} \Leftrightarrow x = \dfrac{-4 \pm 8}{2} \Leftrightarrow x = -6 \vee x = 2$ *e como a função* $x \to t(x) = x^2 + 4x - 12$ *tem por gráfico uma parábola com a concavidade voltada para cima, tendo dois zeros é negativa entre eles. Logo, podemos concluir que* $d(x) > 3 \Leftrightarrow t(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]-6, 2\right[$.

4.

a)

Ora, $g(x) = 2x^2 - 8x + 6 = 2(x^2 - 4x + 3) = 2(x^2 - 4x + 4 - 1) = 2(x^2 - 4x + 4) - 2 = 2(x-2)^2 - 2$.

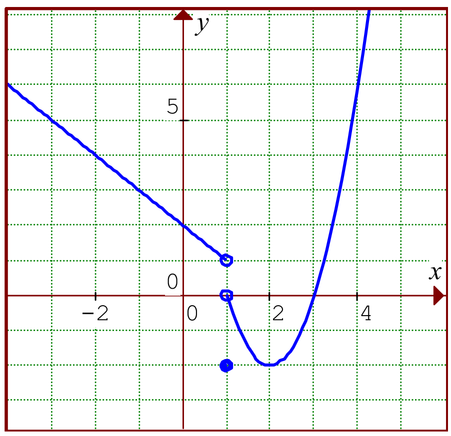
Portanto, o gráfico de g é uma parábola com a concavidade voltada para cima, com vértice V (2, -2) e com eixo de simetria a recta vertical de equação $x = 2$.

Como $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \Leftrightarrow x - 2 = -1 \quad \vee \quad x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad x = 3$

e $g(0) = 2 \times 0^2 - 8 \times 0 + 6 = 6$, *então o gráfico de g intersecta o eixo Ox nos pontos de coordenadas* $(1, 0)$ *e* $(3, 0)$ *e o eixo Oy no ponto de coordenadas* $(0, 6)$.

b)

Considerando que o gráfico da função $y = -x + 2$, *de domínio IR, é uma recta, quer as principais características do gráfico de g referidas na alínea anterior, podemos elaborar com facilidade uma representação gráfica da função h:*



5.

a)

Ora, $g(x)=2(x-1)^2.(x-3)=2(x^2-2x+1)(x-3)=2(x^3-3x^2-2x^2+6x+x-3)=2x^3-10x^2+14x-6$.

Construindo uma tabela de variação de sinal, tendo em consideração as propriedades das funções afim e quadrática, vem:

x	$-\infty$	1		3	$+\infty$
$2(x-1)^2$	+	0	+	+	+
$x-3$	-	-	-	0	+
$h(x)=2(x-1)^2(x-3)$	-	0	-	0	+

Logo, $h(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,3\right[$*, pelo que* $S=\left]-\infty,1\right[\cup\left]1,3\right[$.

b)

Se efectuarmos uma translação do gráfico de h associada ao vector $\vec{u}=(0,-1)$ *obtemos o 2.º gráfico da esquerda, sendo* $r(x)=h(x)-1$*. Determinando o gráfico simétrico do da função r relativamente ao eixo Ox, obtemos o gráfico de s, sendo* $r(x)=-s(x)$*. Por último, t é tal que* $s(x)=\left|t(x)\right|$.

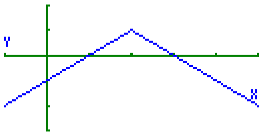


Gráfico de h

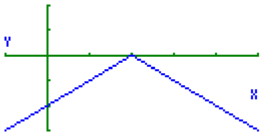


Gráfico de r

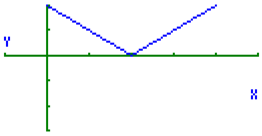


Gráfico de s

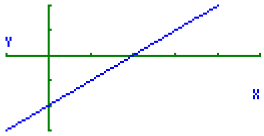


Gráfico de t

O gráfico de t intersecta os eixos coordenados nos pontos de coordenadas (2, 0) e (0, -2). Assim, podemos obter a equação da recta representada: $m=\dfrac{-2-0}{0-2}=1$ *e* $b=-2$*, logo* $y=x-2$ *é a equação dessa recta.*

Desta forma, $t(x)=x-2$*,* $s(x)=\left|x-2\right|$*,* $r(x)=-\left|x-2\right|$ *e, portanto,* $h(x)=1-\left|x-2\right|$ *(ou* $h(x)=1-\left|-x+2\right|$*).*

FIM

(1) Uma função é ímpar se e só se objectos simétricos tiverem imagens simétricas: $f(-x)=-f(x), \forall x\in D_f$.
Logo, o gráfico de *f* é simétrico em relação à origem do referencial.
Uma função é injectiva se e só se objectos diferentes tiverem imagens diferentes: $x_1\neq x_2 \Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2), \forall x_1,x_2\in D_f$.
Logo, uma qualquer recta horizontal não pode intersectar o gráfico de *f* em mais do que um ponto.

(2) Basta tem em consideração que o gráfico de *g* pode ser obtido por translação associada ao vector $\vec{u}=(0,-2)$ do gráfico de *f*.

(3) O cálculo da área da secção obtida para $c=-1$, $c=0$ e $c=1$, respectivamente, $a(-1)=\pi\times 0^2=0$, $a(0)=\pi\times 1^2=\pi$ e $a(1)=\pi\times 0^2=0$, permite eliminar três das alternativas. Por outro lado, constatando que a área da secção obtida é máxima para $c=0$ (isto é, que $c=0$ é maximizante) pode eliminar-se imediatamente três das alternativas.

(4) Dado que $2x-y+2=0 \Leftrightarrow y=2x+2$, o declive da recta é $m=2=\dfrac{u_2}{u_1}$, sendo u_1 e u_2 as coordenadas de um vector director.

(5) Basta ter em consideração que as rectas que contêm os lados do triângulo são: $y=x+2$, $y=-x+2$ e $y=0$.