Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

31/03/2003 **Turma B - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**C**	**A**	**D**	**C**	**B**

Questão	*4*	*3*	*2*	*1*	*5*
Prova 2	**D**	**B**	**A**	**B**	**C**

2.ª Parte

1.

a)

Ora, $\overline{AC} = \sqrt{(6-4)^2 + (7-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33} = \sqrt{(2-4)^2 + (7-5)^2 + (0-5)^2} = \overline{AB}$.

Portanto, A é um ponto do plano mediador do segmento [BC], pois é equidistante dos extremos do segmento.

<u>Ou ainda</u>:

Como o plano mediador de um segmento de recta é perpendicular ao segmento no seu ponto médio, então $x = 4$ *é uma equação desse plano. Ora, A (4, 5, 5) é um ponto desse plano, pois as suas coordenadas verificam a condição que define o plano.*

b)

A recta BH é uma recta do plano seccionador e do plano que contém a base da pirâmide. Logo, a secção obtida na base da pirâmide é o segmento de recta [BF]. Como A é ponto comum ao plano seccionador e à face [ADE], então a secção obtida nesta face é o segmento de recta [AF]. Por outro lado, [AB] é comum ao plano seccionador e às faces [ABC] e [ABE]. Assim, a secção obtida é o triângulo [ABF].

c)

Ora, $\overrightarrow{HB} = B - H = (2, 7, 0) - (5, 0, 0) = (-3, 7, 0)$ *e H é um ponto dessa recta.*

Logo, $(x, y, z) = (5, 0, 0) + k(-3, 7, 0) \wedge k \in IR$ *é uma equação vectorial da recta HB.*

d)

Ora, $\overrightarrow{HA} = A - H = (4, 5, 5) - (5, 0, 0) = (-1, 5, 5)$ *e* $\overrightarrow{CE} = E - C = (2, 3, 0) - (6, 7, 0) = (-4, -4, 0)$.

Assim, $\vec{w} = \overrightarrow{HA} - \overrightarrow{CE} = (-1, 5, 5) - (-4, -4, 0) = (3, 9, 5)$. *Logo,* $\|\vec{w}\| = \sqrt{3^2 + 9^2 + 5^2} = \sqrt{115}$.

e)

Ora, $\overline{AB} = \sqrt{(2-4)^2 + (7-5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{4+4+25} = \sqrt{33}$ *, pelo que o raio da superfície esférica é* $\frac{\sqrt{33}}{2}$.

O seu centro é ponto médio do segmento de recta [AB]: $M\left(\frac{4+2}{2}, \frac{5+7}{2}, \frac{5+0}{2}\right) = \left(3, 6, \frac{5+0}{2}\right)$.

Logo, $(x-3)^2 + (y-6)^2 + (z-\frac{5}{2})^2 = \frac{33}{4}$ *define a superfície esférica considerada.*

f)

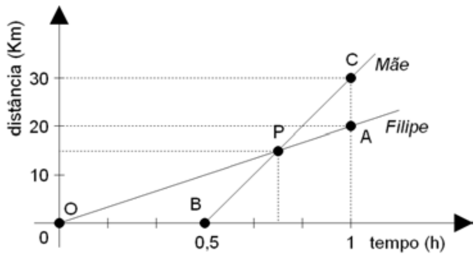
Ora, como $G\left(\frac{6+2}{2}, \frac{7+3}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (4, 5, 0)$ *e* $A = (4, 5, 5)$ *, então AG é perpendicular ao plano xOy, que contém a base da pirâmide, sendo, portanto,* $\overline{AG} = 5$.

O raio da base do cone é a semi-diagonal da base da pirâmide, portanto $r = \frac{\overline{BD}}{2} = \frac{\overline{CD} \times \sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

Logo, $V_{cone} = \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{2})^2 \times 5 = \frac{40\pi}{3}$ *unidades de volume.*

2.

Como as velocidades são constantes, os gráficos que relacionam o tempo e a distância percorrida pelo Filipe (F) e pela mãe (M) vão ser "rectas" com declive igual à velocidade.
No instante 0, o Filipe sai de casa. Isto corresponde ao ponto O, origem do referencial.
À velocidade que vai, numa hora faz 20 Km. Marcamos o ponto A (1, 20).
A mãe partiu meia hora depois, ou seja, quando $t = 0$ a distância percorrida era ainda zero. Marcamos o ponto B (0,5; 0).
Como meia hora depois ela teria percorrido 30 km, obtemos o ponto C (1, 30).

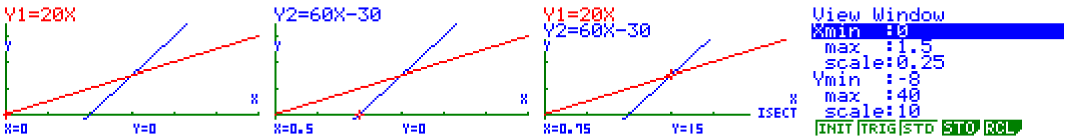


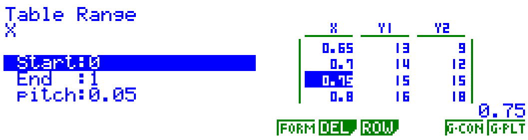
A solução do problema está em P, o ponto de intersecção dos dois gráficos.

O percurso do Filipe é dado pela equação $d_F = 20t$.

O percurso da mãe é dado por uma equação do tipo $d_M = 60t + b$. *Substituindo na equação as variáveis t e d pelas coordenadas do ponto C (1, 30), obtém-se:* $30 = 60 \times 1 + b \Leftrightarrow b = -30$. *Portanto, será* $d_M = 60t - 30$.

Definidas as funções $y_1 = 20x$ *e* $y_2 = 60x - 30$, *podemos obter os gráficos numa janela adequada:*





Utilizando o comando G-Solv + ISCT, a calculadora fornece para coordenadas do ponto P: (0,75; 15), que podem ser confirmadas na tabela de valores dessas mesmas funções.

Resolvendo o sistema de equações, podemos confirmar esses valores:

$$\begin{cases} d = 20t \\ d = 60t - 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20t \\ 20t = 60t - 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 20t \\ 4t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{3}{4} \\ d = 15 \end{cases} \qquad (0{,}75^h = 0{,}75 \times 60^{min} = 45^{min})$$

Portanto, a mãe teve de percorrer 15 km até encontrar o Filipe, demorando 15 minutos (45-30) nessa perseguição.

3.

a)

$D_f =]-4, 2[\cup]2, 6]$; $D'_f = [-2, 2[$; *zeros de f:* $x = -2$ *e* $x = 4$.

b)

Mínimo absoluto: $y = -2$; *mínimo relativo:* $y = -1$; *máximo relativo:* $y = 1$; *máximo absoluto: não existe.*

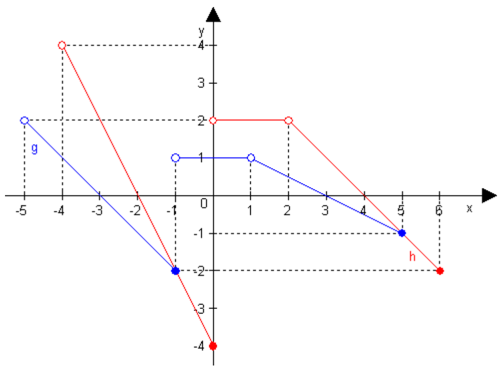
c)

x	-4		-2		0		2		4		6
$f(x)$		+	0	-	-2	+		+	0	-	-1

x	-4		0		2		6
$f(x)$		↘	-2	→		↘	-1

d)

Ver gráficos na figura ao lado.



e)

A afirmação é falsa. Ainda que a função não seja contínua no ponto $x = 0$ *(não é possível desenhar o gráfico em torno desse ponto sem levantar o lápis – há uma quebra em* $x = 0$*), ela não é uma função injectiva, visto haver objectos diferentes com igual imagem (por exemplo,* $x = 0{,}5$ *e* $x = 1{,}5$ *têm ambos a mesma imagem* $y = 1$*).*

f)

Sejam A (-4, 2), B (-2, 0), C (2, 1) e D (6, -1).

O declive da recta AB é $m_{AB}=\frac{2-0}{-4-(-2)}=-1$ *e a ordenada na origem é* $b_{AB}=-2$*. Logo,* $y=-x-2$ *é a equação reduzida da recta AB.*

O declive da recta CD é $m_{CD}=\frac{1-(-1)}{2-6}=-\frac{1}{2}$.

Portanto, a equação reduzida da recta CD é do tipo $y=-\frac{1}{2}x+b$*. Como C é um ponto dessa recta, então as suas coordenadas terão de verificar essa equação:* $1=-\frac{1}{2}\times 2+b \Leftrightarrow b=2$.

Logo, $y=-\frac{1}{2}x+2$ *é a equação da recta CD.*

Logo, f pode ser definida analiticamente por:

$$x \to f(x)=\begin{cases} -x-2 & \Leftarrow & -4<x\le 0 \\ 1 & \Leftarrow & 0<x<2 \\ -\frac{1}{2}x+2 & \Leftarrow & 2<x\le 6 \end{cases}$$

4.

a)

Ora, $j(-1)=2$ *e* $j(1)=-3\times 1+7=4$*, isto é,* $j(-1)\ne j(1)$.

Portanto, é falsa a proposição $j(-x)=j(x), \forall x \in D_j$*. Logo, j não é uma função par.*

b)

Ora, $j(4)=-3\times 4+7=-5\ne 2$.

Logo, o ponto de coordenadas (4, 2) não é um ponto do gráfico de j.

c)

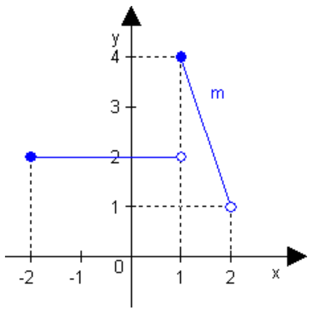
Ora, $-3x+7<0 \Leftrightarrow x>\frac{7}{3}$.

Como $j(x)=2\ge 0, \forall x \in \left]-\infty, 1\right[$ *e* $\frac{7}{3}>1$*, então a função é negativa em* $\left]\frac{7}{3}, +\infty\right[$.

d)

Ora, $m: x \to m(x)=\begin{cases} 2 & \Leftarrow & -2\le x<1 \\ -3x+7 & \Leftarrow & 1\le x<2 \end{cases}$.

O contradomínio de m é $D'_m=\left]1, 4\right]$.



FIM

---

(1) Note que:

$A+\overrightarrow{EC}=A+\overrightarrow{AE}=E$; $\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ e $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \vec{0}=\vec{0}$.

(2) Note que $|y|\le 1 \Leftrightarrow -1\le y\le 1$ e que a condição $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ define a circunferência de centro em (a, b) e raio r ($r>0$).

(3) Se o vector $\vec{u}=(u_1, u_2)$ é um vector director da recta *r*, então o seu declive é $m_r=\frac{u_2}{u_1}$, com $u_1\ne 0$.

(4) O gráfico de Y_2 pode ser obtido do gráfico de Y_1 por translação associada ao vector $\vec{v}=(2,1)$, logo $Y_2(x)=Y_1(x-2)+1$.

(5) Não acredito que tenha dúvidas!
Mesmo assim, fica o convite:
http://www.prof2000.pt/users/amma/recursos_materiais/alabmat/0_ficheiros/P_nacirc.gsp