Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

18/11/2002 **Turmas A e B** **10.º Ano**

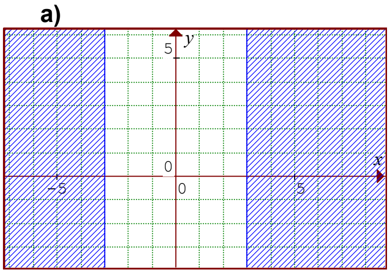
Nome: ______________________________	*N.º:* _____	*Turma:* ___

1.

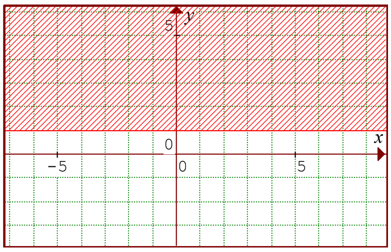
A alternativa correcta é [C]. (porquê?)

2.

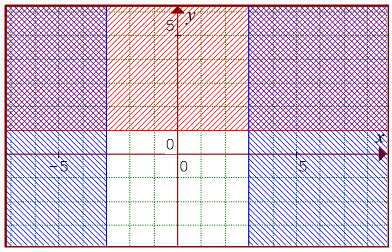
a)



Região definida pela condição $|x| \geq 3$



Região definida pela condição $y \geq 1$



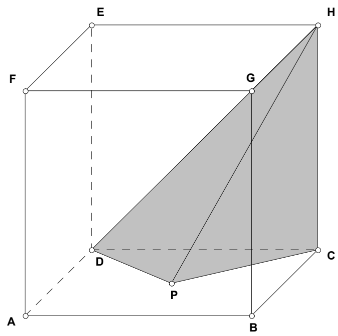
A região definida pela condição dada é a intersecção das duas regiões anteriores, isto é, os dois ângulos rectos que figuram nos 1.º e 2.º quadrantes (a quadriculado, incluindo as fronteiras)

b)

Desdobrando o módulo e aplicando de seguida as 1.^{as} leis de De Morgan, vem:

$$\begin{aligned} \sim(|x| \geq 3) &\Leftrightarrow \sim(x \leq -3 \ \vee \ x \geq 3) \\ &\Leftrightarrow x > -3 \ \wedge \ x < 3 \\ &\Leftrightarrow -3 < x < 3 \end{aligned}$$

3.



a) *Apresentam-se três resoluções possíveis:*

1) *As diagonais de um quadrado dividem-no em quatro triângulos geometricamente iguais. Logo, a área do triângulo considerado é um quarto da área da face do cubo. Isto é,* $A_{[CDP]} = \dfrac{a^2}{4}$.

2) *Sendo Q o ponto médio da aresta [CD] e considerando esta mesma aresta para base do triângulo [CDP], vem:* $A_{[CDP]} = \dfrac{\overline{CD} \times \overline{PQ}}{2} = \dfrac{a \times \frac{a}{2}}{2} = \dfrac{a^2}{4}$, *c.q.m..*

3) *Sabendo que as diagonais de um quadrado são perpendiculares e se bissectam, conclui-se que o triângulo [CDP] é rectângulo e isósceles. Assim,*

$$A_{[CDP]} = \frac{\overline{DP} \times \overline{PC}}{2} = \frac{\frac{\overline{DB}}{2} \times \frac{\overline{DB}}{2}}{2} = \frac{\overline{DB}^2}{8} = \frac{\overline{DA}^2 + \overline{AB}^2}{8} = \frac{a^2 + a^2}{8} = \frac{a^2}{4}.$$

b)

HC é perpendicular ao plano BCD, pelo que se considerarmos para base da pirâmide o triângulo [CDP] a altura da mesma será o segmento de recta [HC].

Assim, $V_{\text{pirâmide}} = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{a^2}{4} \times a = \dfrac{a^3}{12}$ *e* $V_{\text{cubo}} = a^3$. *Logo,* $\dfrac{V_{\text{pirâmide}}}{V_{\text{cubo}}} = \dfrac{1}{12}$.

c1)

Sendo $\overline{DP} = \dfrac{\overline{DB}}{2} = \dfrac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{2 \times 2^2}}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ *e sabendo que o triângulo [DEP] é rectângulo em D, vem*

$$\overline{EP} = \sqrt{\overline{DP}^2 + \overline{ED}^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{2+4} = \sqrt{6}.$$

Logo, $P = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{6}$ *decímetros, c.q.m.*

c2)

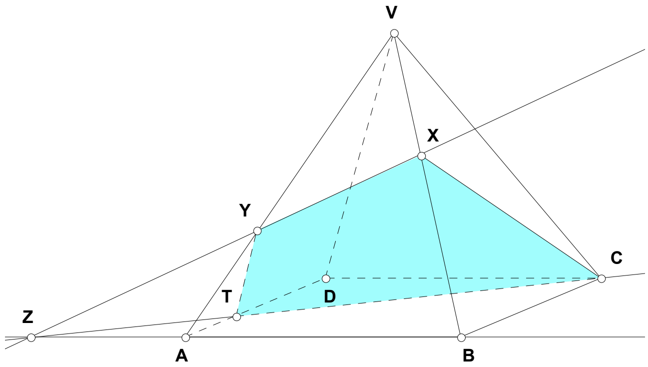
Como $\sqrt{2} = 1{,}41421...$ *e* $\sqrt{6} = 2{,}44948...$, *vem:*

$$\begin{array}{ccccc} 1{,}4 & < & \sqrt{2} & < & 1{,}5 \\ 2{,}4 & < & \sqrt{6} & < & 2{,}5 \\ \hline 3{,}8 & < & \sqrt{2}+\sqrt{6} & < & 4{,}0 \end{array}$$

Logo, $5{,}8\ dm < P < 6{,}0\ dm$ *.*

4.

a)



As rectas XY e AB, complanares (ambas pertencem ao plano ABV), intersectam-se em Z. Logo, Z é um ponto comum aos planos CXY e ABC, pois é um ponto comum de duas rectas, cada uma pertencente a cada um desses planos (XY pertence a CXY e AB pertence a ABC). Por outro lado, o ponto C é também um ponto comum desses planos (dado). Como dois pontos distintos definem uma recta, a recta CZ é a recta de intersecção dos planos considerados.

b)

Ver figura. (De acordo com a), CZ é a recta de intersecção dos planos ABC e CXY. Logo, T é o ponto de intersecção do plano CXY com a aresta [AD], pertencente ao plano ABC.)

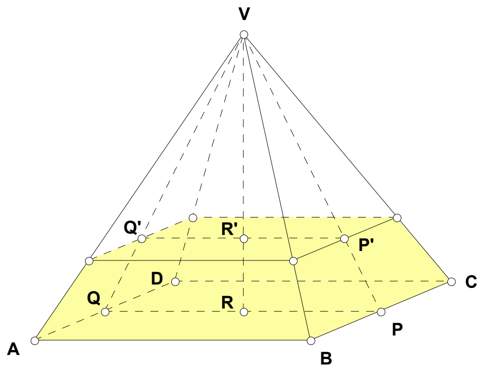
c)

Aceitando a sugestão, consideremos o triângulo isósceles [VPQ], cuja altura relativamente à sua base [PQ] é o segmento de recta [VR] (segmento altura da pirâmide).

Considerando agora o triângulo rectângulo [VRP], temos $tg\,(V\hat{P}R) = \dfrac{\overline{VR}}{\overline{PR}} = \dfrac{6}{3} = 2$.

Logo, $V\hat{P}R = tg^{-1}(2) \approx 63{,}4^{\circ}$ *, que é a amplitude do diedro considerado, com aproximação à décima de grau.*

d)



Como os triângulos [VPQ] e [VP'Q'] são semelhantes, então os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais, assim como as respectivas alturas:

$\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \dfrac{\overline{VP}}{\overline{VP'}} = \dfrac{\overline{VQ}}{\overline{VQ'}} = \dfrac{\overline{VR}}{\overline{VR'}}$.

De $\dfrac{\overline{PQ}}{\overline{P'Q'}} = \dfrac{\overline{VR}}{\overline{VR'}}$ *obtém-se* $\dfrac{6}{\overline{P'Q'}} = \dfrac{6}{\overline{V'R'}}$ *, donde* $\overline{P'Q'} = \overline{VR'}$.

Calculando agora o volume do frasco, temos:

$V_f = \dfrac{1}{3} \times 6^2 \times 6 = 36 \times 2 = 72\ cm^3$.

Quando o frasco está meio cheio, o líquido ocupa o volume de $\dfrac{V_f}{2} = \dfrac{72}{2} = 36\ cm^3$*, que mais não é que o volume da pirâmide de altura* $h'' = \overline{VR'} = \overline{P'Q'}$.

Assim, $36 = \dfrac{1}{3} \times (h'')^2 \times h'' \Leftrightarrow (h'')^3 = 108 \Leftrightarrow h'' = \sqrt[3]{108} \Leftrightarrow h'' = \sqrt[3]{3^3 \times 4} \Leftrightarrow h'' = 3\sqrt[3]{4}$.

Logo, a altura do líquido no interior do frasco é $h' = \overline{VR} - \overline{VR'} = 6 - 3\sqrt[3]{4}\ cm^3$*, c.q.m..*

Alternativa:

A razão entre os volumes das duas pirâmides é $\dfrac{1}{2} = \dfrac{V_{P\ pequena}}{V_{P\ grande}}$ *. Como as pirâmides são semelhantes, então a razão de semelhança é* $r = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \times \dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Assim, $r = \dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} = \dfrac{\overline{VR'}}{\overline{VR}}$ *, donde* $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2} = \dfrac{\overline{VR'}}{6} \Leftrightarrow \overline{VR'} = 3\sqrt[3]{4}$.

Logo, a altura do líquido no interior do frasco é $h' = \overline{VR} - \overline{VR'} = 6 - 3\sqrt[3]{4}\ cm^3$*, c.q.m..*