Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

04/11/2002 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **10.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

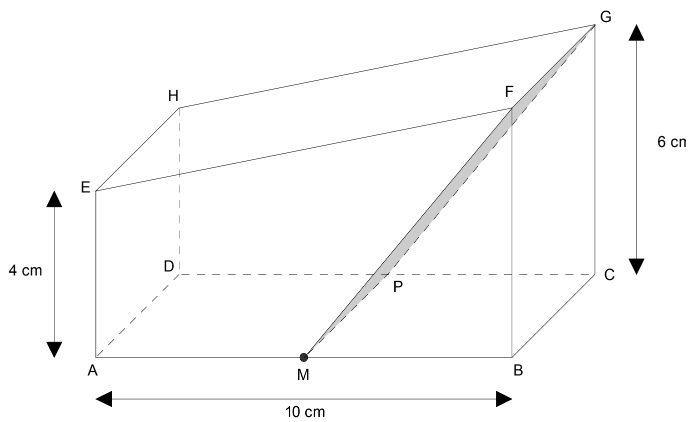
$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$

Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**D**	**A**	**D**	**C**

Questão	*4*	*5*	*1*	*3*	*2*
Prova 2	**C**	**B**	**C**	**A**	**B**

2.ª Parte

1.



a)

Dadas as condições da figura, podemos concluir que $FG \parallel BC$.
Logo, a recta BC é paralela ao plano FGM, pois a recta FG do plano FGM é paralela à recta BC.

b)

Ver figura, onde $PG \parallel MF$ e $MP \parallel FG$.

c)

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos rectângulos [ABF] e [BAE], temos:

$$\overline{AF} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BF}^2} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} \quad e \quad \overline{BE} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AE}^2} = \sqrt{10^2 + 4^2} = \sqrt{116} \; .$$

Como $\sqrt{136} = 11{,}6619\ldots$ *e* $\sqrt{116} = 10{,}7703\ldots$ *, vem:*

$$\begin{array}{ccccc} 11{,}6 & < & \sqrt{136} & < & 11{,}7 \\ 10{,}7 & < & \sqrt{116} & < & 10{,}8 \\ \hline 22{,}3 & < & \sqrt{136} + \sqrt{116} & < & 22{,}5 \end{array}$$

Logo, $22{,}3 \text{ cm} < \overline{AF} + \overline{BE} < 22{,}5 \text{ cm}$.

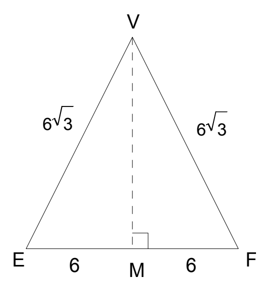
2.

a)

As faces laterais da pirâmide são triângulos isósceles de bases iguais à aresta do cubo, sendo os outros dois lados iguais às semi-diagonais espaciais do cubo.
Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo rectângulo [FAC], temos:

$$\overline{FC} = \sqrt{\overline{FA}^2 + \overline{AC}^2} = \sqrt{\overline{FA}^2 + \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{12^2 + 12^2 + 12^2} = \sqrt{3 \times 12^2} = 12\sqrt{3} \text{ . Logo, } \overline{FV} = \frac{\overline{FC}}{2} = 6\sqrt{3} \; .$$

Considerando agora o triângulo isósceles [FEV], podemos calcular a sua altura relativamente a [FE]:



$$\overline{VM} = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 - 6^2} = \sqrt{36 \times 3 - 36} = \sqrt{36 \times 2} = 6\sqrt{2} \; .$$

Assim, $A_{[ADEFV]} = A_{[ADEF]} + 4 \times A_{[EFV]} = 12^2 + 4 \times \frac{12 \times 6\sqrt{2}}{2} = 144 + 144\sqrt{2}$.

A área total da pirâmide é $144.(1 + \sqrt{2})$ *centímetros quadrados.*

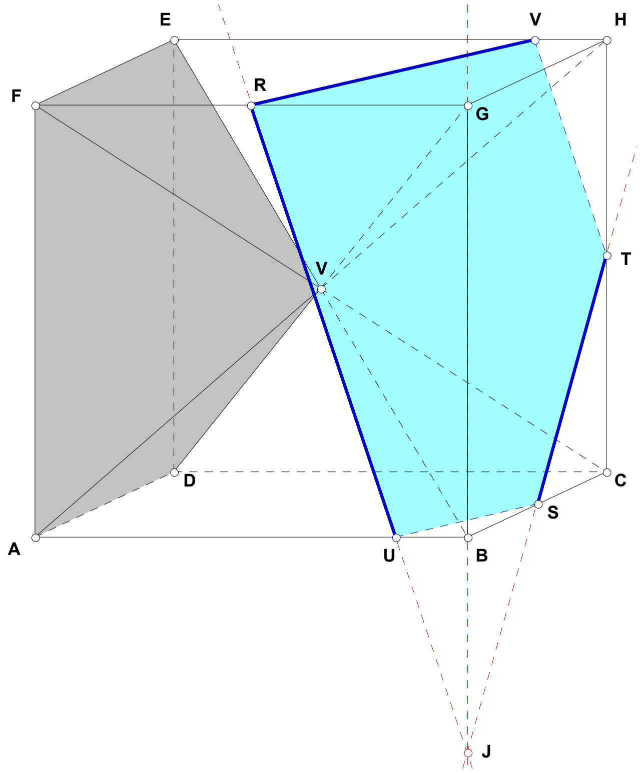
b)

Considerando o triângulo [EVM], temos

$sen\,(F\hat{V}M) = \dfrac{6}{6\sqrt{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Donde, $F\hat{V}M = sen^{-1}(\dfrac{\sqrt{3}}{3})$.

Logo, $E\hat{V}F = 2 \times F\hat{V}M = 2 \times sen^{-1}(\dfrac{\sqrt{3}}{3}) \approx 70{,}53^{\circ}$.



c1)

O ponto R é um ponto pertencente à intersecção dos planos ABG e RST, visto ser um ponto comum aos dos planos.

c2)

Os planos ABG e RST, não coincidentes, possuindo um ponto comum (R) terão de ser secantes.

c3)

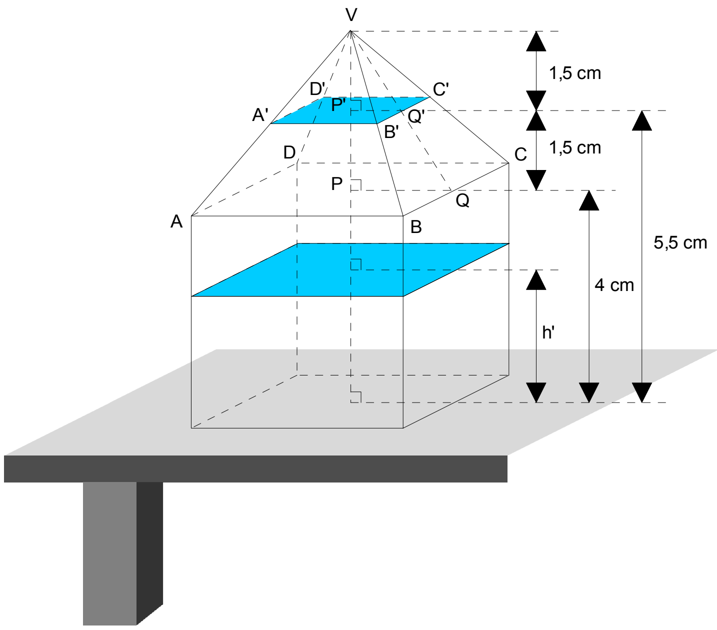
O ponto J é o ponto de intersecção das rectas BG e ST. (ver figura)

c4)

O ponto J é ponto comum aos planos ABG e RST;
a recta JR é a intersecção dos planos ABG e RST;
o ponto U é o ponto de intersecção da recta JR com a aresta [AB]; o segmento de recta [RV] é paralelo ao segmento de recta e [SU] (um plano intersecta planos paralelos segundo rectas paralelas).
(ver figura)

3.

a)



Com o frasco nesta posição horizontal, a figura definida pela superfície do líquido em repouso é a que se obtém no sólido apresentado seccionando-o com um plano horizontal à altura (h, em centímetros) a que se encontra o líquido no frasco. Quando $h \in \left]0, 4\right]$*, o plano referido secciona o cubo segundo um quadrado geometricamente igual à face do cubo, visto o plano ser paralelo à base. Quando* $h \in \left]4, 7\right[$*, o plano intersecta agora a pirâmide regular. A secção é também um quadrado, visto o plano ser paralelo à sua base. Contudo, este quadrado é de menores dimensões que o obtido por secção no cubo, sendo tanto mais pequeno quanto maior for* $h \in \left]4, 7\right[$.

Concluindo: a figura definida pela superfície do líquido em repouso é sempre um quadrado, mas nem sempre os vários quadrados obtidos são geometricamente iguais. Logo, não será correcto afirmar que a figura definida pela superfície do líquido em repouso é sempre o "mesmo quadrado".

b)

A superfície considerada nesta situação encontra-se ilustrada na figura acima (quadrado [A'B'C'D']).

Tendo em consideração a semelhança dos triângulos [VPQ] e [VP'Q'], de razão de semelhança

$r = \dfrac{\overline{VP'}}{\overline{VP}} = \dfrac{1{,}5}{3} = \dfrac{1}{2}$*, podemos concluir* $\dfrac{\overline{P'Q'}}{\overline{PQ}} = \dfrac{1}{2}$*, donde* $\overline{P'Q'} = \overline{PQ} \times \dfrac{1}{2} = 2 \times \dfrac{1}{2} = 1$*. Ou seja, os quadrados*

[ABCD] e [A'B'C'D'] são semelhantes, também com razão de semelhança $r = \dfrac{1}{2}$.

Sendo, então, a superfície do líquido um quadrado com 2 cm de lado, o seu perímetro é de 8 cm e a sua área de 4 cm^2.

c)

Começando por determinar o volume do frasco, vem:

$$V_f = V_{cubo} + V_{pirâmide} = 4^3 + \frac{1}{3} \times 4^2 \times 3 = 64 + 16 = 80\,.$$

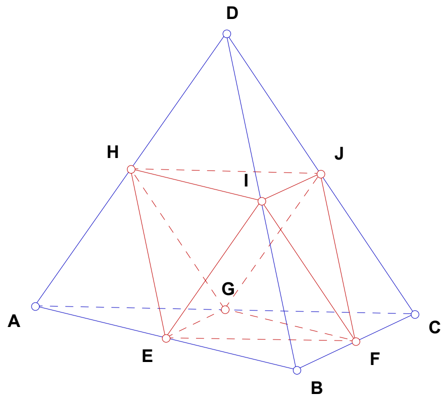
Quando o frasco está meio cheio, o líquido ocupa o volume de $\frac{V_f}{2} = \frac{80}{2} = 40\ cm^3$*, que, sendo inferior ao volume do cubo, ocorrerá para uma altura h' inferior a 4 cm. (ver figura acima)*

Assim, $40 = 4^2 \times h' \Leftrightarrow h' = \frac{40}{16} \Leftrightarrow h' = \frac{5}{2}$.

Nessa situação, a altura do líquido no interior do frasco será de 2,5 cm.

4.

a)



Como [ABCD] é um tetraedro regular, as suas 4 faces são triângulos equiláteros geometricamente iguais.

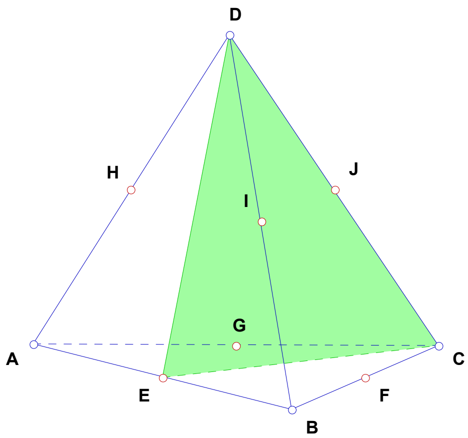
Consideremos um desses triângulos, por exemplo: a face [ABD] e os pontos H e I, pontos médios de [HD] e [BD], respectivamente.

No triângulo [DHI], é $\overline{HD} = \overline{DI}$ *, logo* $H\hat{I}D = D\hat{H}I$ *, pois num triângulo a lados iguais opõem-se ângulos iguais. Mas, como o triângulo [ABD] é equilátero, então* $H\hat{D}I = 60^\circ$ *. Logo,*

$H\hat{D}I = 60^\circ = H\hat{I}D = D\hat{H}I$ *, pelo que, sendo equiângulo, o triângulo [DHI] será também equilátero.*

Consequentemente, as quatro faces do tetraedro [HIJD] são triângulos equiláteros geometricamente iguais, pelo que será regular.

b)



Como vimos, os triângulos [ABD] e [DHI] são equiláteros, logo são semelhantes. A razão de semelhança, é $r = \frac{\overline{HD}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$*, visto H ser o ponto médio de [AD].*

Assim, os tetraedros considerados são também semelhantes, com a mesma razão de semelhança entre o comprimentos das suas arestas.

Consequentemente, $V_{[HIJD]} = r^3 \times V_{[ABCD]}$ *, ou seja,*

$V_{[HIJD]} = \frac{V_{[ABCD]}}{8}$.

c)

O polígono obtido é um triângulo isósceles, visto $\overline{DE} = \overline{EC} < \overline{DC}$ *.*

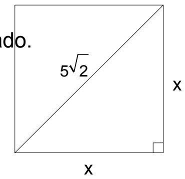
$[DE] \cong [EC]$*, pois são alturas de dois triângulos equiláteros geometricamente iguais (não esquecer que o tetraedro é regular).*

O Professor

---

(1) Note que as seis arestas de um tetraedro regular inscrito num cubo são diagonais faciais desse cubo, uma por face.

(2) A resposta é imediata se souber que a diagonal de um quadrado é $\sqrt{2}$ vezes maior que o lado desse quadrado. Ora, $x^2 + x^2 = (5\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 50 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 5$. Logo o perímetro do quadrado é 20 cm.



(3) Note que a recta AB sendo perpendicular ao plano BCD, é perpendicular a toda a recta desse plano.

(4) Apenas a afirmação III é falsa: é sempre possível considerar duas arestas do tetraedro que não são complanares. (verifique)

(5) A recta r' é paralela ao plano α (porquê?) e como o ponto B não pertence a α esse paralelismo é estrito. Logo, r´ não pode intersectar o plano α.