Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Global de Matemática

10.º Ano **Provas 1 e 2** **Junho/98**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

1.ª Parte

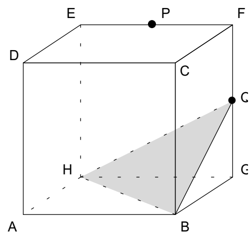
Questão	*1(1)*	*2(2)*	*3(3)*	*4(4)*	*5(5)*
1.ª Prova	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
2.ª Prova	*4*	*5*	*1*	*3*	*2*
1.ª Prova	**D**	**B**	**A**	**C**	**B**
2.ª Prova	**F**	**G**	**E**	**E**	**H**

2.ª Parte

1.

a) O plano PQG intersecta o plano α segundo a recta HG. Como a recta PQ pertence ao plano PQG, então esta recta intersectará o plano α num ponto comum a esta recta e à recta HG. Logo, a afirmação é falsa.

b) Aplicando o teorema de Pitágoras e reconhecendo ser $\overline{BC} = \overline{HC}$, vem:



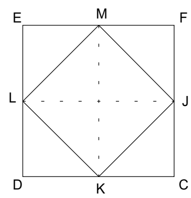
$\overline{HB} = \sqrt{\overline{BG}^2 + \overline{HG}^2} = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$;

$\overline{BC} = \overline{HC} = \sqrt{\overline{HG}^2 + \overline{GC}^2} = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$.

Logo, o perímetro da secção obtida é $P = 4\sqrt{2} + 4\sqrt{5} = 14{,}6$ cm.

c) Como os vértices do octaedro são os centros das faces do cubo, os planos (perpendiculares entre si, dois a dois) TKN, TLN e LKJ, que seccionam as faces do cubo, contém cada um deles 4 arestas do octaedro. Podemos, então, reparar que as arestas do octaedro são hipotenusas de triângulos rectângulos geometricamente iguais, cujos catetos têm metade do comprimento da aresta do cubo. Desta forma, as faces do octraedro são triângulos equiláteros e, portanto, o octaedro é regular.

Os dois quadriláteros, que pertencem a planos paralelos, são dois quadrados (as suas diagonais são perpendiculares e geometricamente iguais) que, vistos de cima, estão representados na figura ao lado. Os pontos J, K, L e M coincidem com os pontos médios dos lados do quadrado [CDEF]. Pela divisão da figura em triângulos geometricamente iguais, é imediato concluir que o primeiro quadrilátero tem o dobro da área do segundo.



ALTERNATIVA:

A medida da aresta do octaedro é $\overline{LK} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$, logo a medida da área do quadrado [JKLM] é $A' = (2\sqrt{2})^2 = 4 \times 2 = 8$. Como a medida da área do quadrado [CDEF] é $A = 4^2 = 16$, então a razão entre as áreas é $\frac{A}{A'} = \frac{16}{8} = 2$.

2.

a) Um vector director da recta AF é, por exemplo, o vector $\overrightarrow{AF} = F - A = (-6,-3,2)$.
Logo, $(x, y, z) = (0,1,2) + k(-6,-3,2),\ k \in IR$ é uma equação vectorial da recta AF.

O ponto em questão é um ponto comum à recta AF e ao plano coordenado yOz (de equação $x = 0$). Os pontos do plano yOz são pontos de abcissa nula, logo o ponto procurado é F (0,1,2)

b) O centro da esfera é M $(\frac{6+0}{2}, \frac{1+4}{2}, \frac{2+0}{2}) = (3, \frac{5}{2}, 1)$, ponto médio do segmento de recta [FA].

O raio da esfera é $r = \frac{\overline{FA}}{2} = \frac{\sqrt{(0-6)^2+(1-4)^2+(2-0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{36+9+4}}{2} = \frac{7}{2}$.

Logo, $(x-3)^2+(y-\frac{5}{2})^2+(z-1)^2 \leq \frac{49}{4}$ é uma condição que define essa esfera.

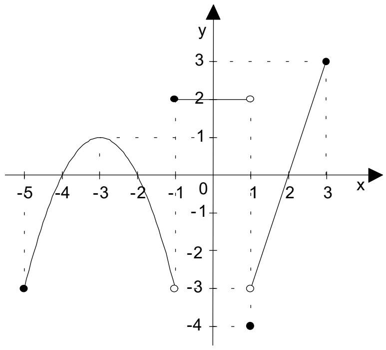
O plano mediador do segmento de recta [CG], perpendicular a este segmento no seu ponto médio, é o plano de equação $x = 3$. Este plano contém o ponto M, centro da esfera. Logo, este plano intersecta a esfera segundo um círculo de raio igual ao raio da esfera, pelo que a sua área será $A = \pi \times (\frac{7}{2})^2 = \frac{49}{4}\pi$.

c) Sendo B (6, 1, 2) e E (0, 4, 0), é $\overrightarrow{BE} = E - B = (-6,3,-2)$.

Assim, $\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{BE} = (-6,-3,2) - 2(-6,3,-2) = (-6,-3,2) + (12,-6,4) = (6,-9,6)$.

Logo, $\left\|\overrightarrow{AF} - 3\overrightarrow{BE}\right\| = \sqrt{6^2+(-9)^2+6^2} = \sqrt{36+81+36} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$.

3.



a) O domínio da função é $D_f = [-5,3]$; o contradomínio é $D'_f = \{-4\} \cup [-3,3]$; os zeros são -4, -2 e 2.

O mínimo absoluto é -4 e o máximo absoluto é 3; $x = -1$ (p.e.) é um ponto de descontinuidade.

A função não é injectiva, pois existem objectos diferentes que possuem igual imagem (por exemplo, -4 e –2 são objectos diferentes e possuem ambos a imagem 0).

b) O conjunto-solução da condição $f(x) > 0$ é $S =]-4,-2[\cup [-1,1[\cup]2,3]$.

c)

x	-5		-3		-1		1		3
$f(x)$	-3	↗	1	↘	‖ 2	→	‖ -4 ‖	↗	3

d) Sendo A (1, -3) e B (3, 3), o declive da recta AB é $m_{AB} = \frac{-3-3}{1-3} = 3$. Então, a equação reduzida desta recta é do tipo $y = 3x + b$. Como o ponto B pertence à recta, temos $3 = 3 \times 3 + b \Leftrightarrow b = -6$, pelo que a sua equação reduzida é $y = 3x - 6$.

Como V (-3, 1) é vértice da parábola, cujo arco está representado, a sua equação é do tipo $y = a(x+3)^2 + 1$.

Como o ponto de coordenadas (-2, 0) pertence ao seu gráfico, será $0 = a(-2+3)^2 + 1 \Leftrightarrow a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = -1$.

Logo, $y = -(x+3)^2 + 1$ é uma equação dessa parábola.

Assim, $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2+1 & \Leftarrow & -5 \leq x < -1 \\ 2 & \Leftarrow & -1 \leq x < 1 \\ -4 & \Leftarrow & x = 1 \\ 3x-6 & \Leftarrow & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ define por ramos a função *f*.

e) Poderia esboçar o gráfico da função *h* a partir do gráfico de *f* da seguinte maneira: mantinha a parte do gráfico de *f* acima e sobre o eixo Ox ; relativamente à parte abaixo deste eixo determinava o seu simétrico relativamente ao mesmo eixo.
Desta forma, será $h(-1) = 2$ e $h(1) = 4$.

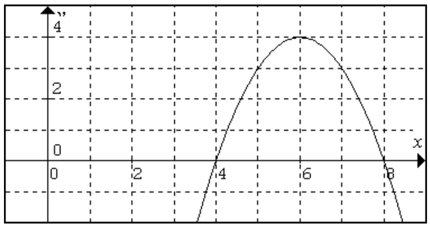
4.

a) Tendo em consideração que o volume de um paralelepípedo rectângulo se obtém pelo produto dos comprimentos das suas três dimensões, vem:
$v(x) = (x-2-1-1)(10-x-1-1) \times 1 = (x-4)(8-x) = 8x - x^2 - 32 + 4x = -x^2 + 12x - 32$, c.q.m.

b) Em IR, o gráfico de v é uma parábola, pois a função é quadrática.
Como

$$v(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm\sqrt{144-128}}{-2} \Leftrightarrow x=\frac{-12\pm 4}{-2} \Leftrightarrow x=8 \vee x=4,$$

então A (4, 0) e B (8, 0) são os pontos de intersecção do gráfico com o eixo Ox.



Logo, o eixo de simetria é a recta vertical, mediatriz de [AB], de equação $x=\frac{4+8}{2} \Leftrightarrow x=6$.
O vértice da parábola é V (6, v(6)) = (6, -36+72-32) = (6, 4).

Por inspecção do gráfico, conclui-se que o volume máximo que se pode obter para a caixa é 4 dm^3 (para $x=6$). As correspondentes dimensões da cartolina são 4 dm por 4 dm.

(Note que o problema apenas está definido para os valores de x tais que: $x-2>2 \wedge 10-x>2 \Leftrightarrow x\in\left]4,8\right[$)

5.

a) Em IR, o gráfico de V é uma recta, pois é uma função afim.
Logo, os gráficos de C e V são, respectivamente B e A.

b) $L(x)=V(x)-C(x)=x-(x^3-3x^2+3x)=-x^3+3x^2-2x=x.(-x^2+3x-2)$.

Como $-x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2} \Leftrightarrow x=2 \vee x=1$ e como $x\to -x^2+3x-2$ define uma parábola com concavidade voltada para baixo, podemos construir a tabela de sinal da função L:

x	$-\infty$	0		1		2	$+\infty$
x	-	0	+	+	+	+	+
$-x^2+3x-2$	-	-	-	0	+	0	-
$L(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Por forma a ser garantido lucro, a empresa deve manter uma produção compreendida entre 1 e 2 toneladas, exclusive.

O Professor

---

(1) Os vectores $\vec{u}=(-2,1)$ e $\overrightarrow{AB}=(-6,0)$ não são colineares, pois as suas coordenadas não são directamente proporcionais.
O simétrico de B em relação á recta de equação $y=-1$ é $A'=(-4,-5)$.
A soma de um ponto com um vector é um ponto, não um vector.
A recta de equação $x=-1$ é a mediatriz do segmento de recta[AB], pois esta recta é perpendicular ao segmento e contém o seu ponto médio.

(2) O gráfico de g pode ser obtido do gráfico de f por uma translação associada ao vector $\vec{v}=(-1,-1)$

(3) Os semieixos maior e menor da elipse são, respectivamente, $a=10$ e $b=5$. Logo, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{25}=1$.
A semi-distância focal será $c=\sqrt{10^2-5^2}=\sqrt{75}=5\sqrt{3}$.

(4) h não é uma função par, pois o seu gráfico não é simétrico em relação ao eixo Oy.
$D'_h=IR_0^+$.
O zero de h é -3 e não 3.

(5) $|x+3|\le 2 \wedge |y-4|\le 1 \Leftrightarrow -2\le x+3\le 2 \wedge -1\le y-4\le 1 \Leftrightarrow -5\le x\le -1 \wedge 3\le y\le 5$.